ISSN 2708-2032
e-ISSN 2708-2040

INTERNATIONAL UNIVERSITY

INTERNATIONAL JOURNAL OF INFORMATION & COMMUNICATION TECHNOLOGIES

Volume 1, Issue 2
June 2020

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

ХАЛЫҚАРАЛЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ МЕЖДУНАРОДНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
INTERNATIONAL UNIVERSITY

INTERNATIONAL JOURNAL OF INFORMATION AND COMMUNICATION TECHNOLOGIES

МЕЖДУНАРОДНЫЙ ЖУРНАЛ ИНФОРМАЦИОННЫХ И КОММУНИКАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

ХАЛЫҚАРАЛЫҚ АҚПАРАТТЫҚ ЖӘНЕ КОММУНИКАЦИЯЛЫҚ ТЕХНОЛОГИЯЛАР ЖУРНАЛЫ

Том 1, Выпуск 2
Июнь 2020

Издание зарегистрировано Министерством информации и общественного развития Республики Казахстан. Свидетельство о постановке на учет № KZ82VPY00020475 от 20.02.2020 г.

Журнал зарегистрирован в Международном центре по регистрации сериальных изданий ISSN (ЮНЕСКО, г. Париж, Франция)

Выходит 4 раза в год.

УЧРЕДИТЕЛЬ:
Международный Университет Информационных Технологий

ISSN 2708-2032 (print)
ISSN 2708-2040 (online)

СОДЕРЖАНИЕ

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

ЦИФРОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ЭКОНОМИКЕ И МЕНЕДЖМЕНТЕ

МИР ЯЗЫКА И ЦИФРОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАСС-МЕДИА

Professor Dulat Dzhumabaev: a life dedicated to science

Professor Dulat Syzdykbekovich Dzhumabaev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, was a prominent scientist, a well-known specialist in the field of the qualitative theory of differential and integro-differential equations, the theory of nonlinear operator equations, and numerical and approximate methods for solving boundary value problems.

Dzhumabaev D.S. was born in Kantagi, Turkistan distinct, South Kazakhstan region, on April 11, 1954. From 1961 to 1971, he attended secondary school in Turkistan. In 1971, he entered the Faculty of Mechanics and Mathematics of Kazakh State University named after S. Kirov (now Al-Farabi Kazakh National University). After graduating with honors from the Department of Mathematics in 1976, he continued to pursue postgraduate studies at the Institute of Mathematics and Mechanics of the Academy of Sciences of the Kazakh SSR. His scientific activity began under the guidance of Academician Orymbek Akhmetbekovich Zhautykov, an outstanding scientist and mathematician, who made a huge contribution to the creation and development of the mathematical science in Kazakhstan. After successful completion of postgraduate school in 1979, Dzhumabaev D.S. joined the Laboratory of Ordinary Differential Equations headed by Academician Zhautykov O.A. He went from being a junior researcher to becoming the head of the Laboratory of Differential Equations, one of the leading divisions of the Institute of Mathematics. He chaired the laboratory from 1996 to 2012.

In 1980, Dzhumabaev D.S. defended his dissertation "Boundary value problems with a parameter for ordinary differential equations in a Banach space" and earned the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences in the specialty 01.01.02 -Differential Equations.

Dzhumabaev D.S. was a successful scientist and versatile specialist in the field of mathematics and its applications. He devoted his talent and hard work to the study of nonlinear operator equations, and to the creation and development of qualitative methods in the theory of boundary value problems for differential equations.

The doctoral dissertation "Singular boundary value problems for ordinary differential equations and their approximation" by Dzhumabaev D.S. is a fundamental work that underwent comprehensive approbation in leading scientific centers, such as the Computing Center of the Russian Academy of Sciences, the Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Institute of Mathematics NAS of Ukraine, Voronezh State University, I. Vekua Institute of Applied Mathematics of Tbilisi State University, and Kiev State University named after T. Shevchenko. The doctoral dissertation was defended at the Specialized Council of the Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine in 1994.

Dzhumabaev D.S. introduced the definition of a linearizer that generalizes the concept of the Frechet derivative to the case of unbounded nonsmooth operators, and proposed a method for proving the convergence of iterative processes that takes into account the specificities of unbounded operator equations. This made it possible to extend the well-known Newton-Kantorovich method to unbounded nonsmooth operator equations and apply it to nonlinear boundary value problems for differential equations. These results were published in the journal "News of the Academy of Sciences of the Kazakh SSR. Series: Physics and Mathematics", 1984 (1, 3), and, at the request of the American Mathematical Society, were translated and published in the journal "American Mathematical Society Translations", 1989, Vol. 142 [1-2], as well as in the journal "Mathematical Notes" [3].

Dzhumabaev D.S. developed the parametrization method of investigation and solving boundary value problems. The method was originally offered in [4] for solving two-point boundary value problems for a linear differential equation. The basic idea behind the method is to reduce the problem in question to an equivalent problem with a parameter whose solution is determined as the limit of a sequence of systems of pairs consisting of the parameter and a function. The parameter is found from a system of linear equations determined by the matrices of the differential equation and boundary conditions. The functions are solutions of Cauchy problems on the partition subintervals for the found values of the parameter. The introduction of parameters made it possible to obtain conditions for the convergence of proposed algorithms and, at the same time, for the existence of a solution, in terms of the input data. This makes the parameterization method different from the shooting method and its modifications, where shooting parameters are found from equations determined through the general solutions of differential equations and conditions for the convergence of algorithms are also given in terms of general solutions.

The parametrization method was then applied to the study of singular problems for which the problem of approximation by regular two-point boundary value problems was solved [5-8]. The method was extended to various boundary value problems for ordinary differential equations on a finite interval and on the whole real line; necessary and sufficient conditions for the unique solvability of problems under consideration were obtained [9-10]. The results obtained allowed us to solve nonlocal boundary value problems for systems of second-order hyperbolic equations in two independent variables [11-18]. The problem of finding a bounded solution of families of systems of ordinary differential equations was solved in [19].

The parametrization method was generalized to nonlinear boundary value problems [20-22]. On the basis of the parametrization method, constructive algorithms were developed for finding solutions to periodic, two-point boundary value problems for integro-differential and loaded equations. For a two-point boundary value problem for Fredholm integro-differential equations, a coefficient criterion for the well-posedness was established in terms of approximating boundary value problems for loaded differential equations [23-29].

In 1998, Dzhumabaev D.S. was awarded the title of professor (specialty 01.01.00 - Mathematics). Under his guidance, two doctoral, twenty candidate’s dissertations, and one PhD thesis were defended. He supervised five PhD students.

In 2004-2005, Dzhumabaev D.S. was the chair of the Expert Commission on Mathematics and Computer Science of the Committee on Supervision and Certification in Education and Science of the MES RK.

Dzhumabaev D.S. was a highly qualified expert in the theory of differential, integral and nonlinear operator equations, computer and mathematical modeling of application problems. He published more than 300 works in scientific journals, including authoritative periodicals like “Journal of Computational and Applied Mathematics”, “Journal of Mathematical Analysis and Applications”, “Mathematical Methods in Applied Sciences”, “Computational Mathematics and Mathematical Physics”, “Mathematical Notes”, “Journal of Mathematical Sciences”, “Ukrainian Mathematical Journal”, “Eurasian Mathematical Journal”, etc. The research findings were presented and discussed at many international symposia and conferences. His scientific results were widely recognized in Kazakhstan and at the international level by experts in the field of differential equations and computational mathematics. The scientific direction formed by Dzhumabaev D.S. has been further developed by his students, who successfully work at the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling and leading universities in Kazakhstan, including the International Information Technology University (Uteshova R.E. and Kadirbayeva Zh.M.).

For a number of years, Dzhumabaev D.S. was the scientific leader of grant projects carried out at the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the MES RK. For many years, he lectured at leading universities in Kazakhstan, such as Al-Farabi Kazakh National University, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, and K. Zhubanov Aktobe Regional State University.

In 2014, at the invitation of the university authorities, Professor Dzhumabaev began to deliver lectures at International Information Technology University. He taught such courses as "Mathematical Analysis", "Methods of solving linear and nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations", "Problems for integro-differential equations of processes with consequences", "Boundary value problems, their applications and methods for solving". It should be noted that his scientific results of recent years were obtained under the influence of teaching at IITU. While giving lectures and conducting practical classes, he realized with great clarity the importance of developing numerical methods for solving application problems. Having set himself the goal of bringing to the final numerical implementation the theoretical results and algorithms of the parameterization method [30], he made a breakthrough in the field of mathematical and computer modeling.

Under scientific supervision of Professor Dzhumabaev, master students and undergraduates of the International University of Information Technology carried out research in the area of numerical methods for solving boundary value problems for differential and integro-differential equations. This helped them choose their future career in applied mathematics (A. Zharmagambetov, A. Zhumabekova, and others).

It is known that Volterra integro-differential equations are solvable for any right-hand side and have classical general solutions. However, there exist linear loaded differential equations and Fredholm integro-differential equations that do not admit classical general solutions. The question arises as to whether it is possible to construct such general solutions that exist for all differential and integro-differential equations and would allow solving boundary value problems for these equations.

Dzhumabaev D.S. offered a novel approach to the concept of the general solution for a linear ordinary Fredholm integro-differential equation based on the parametrization method [31]. The domain interval is partitioned and the values of the solution at the left endpoints of the subintervals are considered as additional parameters. By introducing new unknown functions on the partition subintervals, a special Cauchy problem for a system of integro-differential equations with parameters is obtained. Using the solution of this problem, a new general solution of the linear Fredholm integro-differential equation was constructed. This general solution, unlike the classical general solution, exists for all linear Fredholm integro-differential equations. The new general solution made it possible to propose numerical and approximate methods for solving linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations [31–32]. These methods are based on the construction and solution of a system of linear algebraic equations for arbitrary vectors of the new general solution. The coefficients and the right-hand sides of this system are determined using solutions of the Cauchy problems for linear ordinary differential equations on the subintervals and solutions of a linear Fredholm integral equation of the second kind. Using the new general solution, solvability criteria were established for linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations.

The results and methods were extended to nonlocal boundary value problems for systems of nonlinear loaded hyperbolic equations and Fredholm hyperbolic integro-differential equations [33].

The new approach to the general solution became the basis of methods for research and solving nonlinear boundary value problems for differential and integro-differential equations [34-37]. The methods are based on the construction and solving systems of nonlinear algebraic equations for arbitrary vectors of new general solutions. To solve nonlocal boundary value problems for nonlinear partial differential and integro-differential equations, a modification of Euler's broken lines method is utilized, as well as methods for solving nonlinear boundary value problems for ordinary loaded differential equations and Fredholm integro-differential equations.

These results were further extended to multipoint problems, periodic problems with impulse, and control problems for various classes of differential, loaded differential, integro-differential, and partial differential equations [38-45].

Professor Dzhumabaev made a great contribution to the academic community. He led a scientific seminar on the qualitative theory of differential equations at the Institute of Mathematical and Computer Modeling. He was a scientific expert of State Expertise of the Ministry of Education and Science of the RK. For many years, Dzhumabaev D.S. was a member of the Dissertation Councils at the Institute of Mathematics, Al-Farabi Kazakh National University, Abai Kazakh National Pedagogical University, and K.Zhubanov Aktobe Regional State University. He chaired the Mathematics Section of Academic Council of the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling. He was a member of the editorial board of the scientific journals "News of NAS RK. Series: Physics and Mathematics", "Kazakh Mathematical Journal", and "Bulletin of Karaganda State University. Series: Mathematics".

Dzhumabaev D.S. was awarded the lapel badge "For Contribution to the Development of Science and Technology" and Certificate of Merit of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan.

Since 2018, Dzhumabaev D.S. headed the Department of Mathematical Physics and Mathematical Modeling at the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling. In 2019, his research team, together with mathematicians from Ukraine, Belarus, Uzbekistan, Azerbaijan, Germany, and the Czech Republic, received funding from the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme under EC grant agreement 873071-H2020-MSCA-PISE-2019 (Marie Skłodowska-Curie Research and Innovation Staff Exchange), for the project entitled "Spectral Optimization: From Mathematics to Physics and Advanced Technology" (SOMPATY). The first publication in the framework of this project is devoted to the application of the parameterization method to multipoint problems for Fredholm integro-differential equations [46].

At the end of 2019, having submitted to the competition from the International Information Technology University, professor Dzhumabaev became the recipient of the grant "Best University Teacher 2019" of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan.

A prominent scientist, an outstanding teacher, and a talented organizer, Dulat Syzdykbekovich Dzhumabaev passed away on February 20, 2020.

His memory will live in the hearts of his loved ones, students, and colleagues. His research, scientific ideas and plans will be continued and implemented by his students.

REFERENCES

1. Dzhumabaev D.S. On the solvability of Nonlinear Closed Operator Equations // American Mathematical Society Translations (2). 1989. Vol.142. pp. 91-94.
2. Dzhumabaev D.S. On the Convergence of a modification of the Newton-Kantorovich Method for Closed Operator Equations // American Mathematical Society Translations (2). 1989. Vol.142. pp. 95-99.
3. Dzhumabaev D.S. Convergence of iterative methods for unbounded operator equations // Mathematical Notes. 1987. Vol. 41. No 5. pp. 356-361.
4. Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1989. Vol. 29. No 1, pp. 34-46.
5. Dzhumabaev D.S. Approximation of a bounded solution of a linear ordinary differential equation by solutions of two-point boundary value problems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1990. Vol.30. No 2. pp. 34-45.
6. Dzhumabaev D.S. Approximation of a bounded solution and exponential dichotomy on the line // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1990. Vol.30. No 6. pp. 32-43.
7. Dzhumabaev D.S. Singular boundary value problems and their approximation for nonlinear ordinary differential equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1992. Vol. 32. No 1. pp.10-24.

8. Dzhumabaev D.S. Estimates for the approximation of singular boundary problems for ordinary differential equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1998. Vol. 38. No 11. pp. 1739-1746.
9. Dzhumabaev D.S., Abil'daeva A.D. Properties of the isolated solutions bounded on the entire axis for a system of nonlinear ordinary differential equations // Ukrainian Mathematical Journal. 2017. Vol. 68. No 8. pp. 1297-1304.
10. Dzhumabaev D.S., Uteshova R.E. A limit with weight solution in the singular point of a nonlinear ordinary differential equation and its property // Ukrainian Mathematical Journal. 2018. Vol. 69. No 12. pp. 1717-1722.
11. Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Unique solvability of the boundary value problem for systems of hyperbolic equations with data on the characteristics // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2002. Vol.42. No 11. pp. 1609-1621.
12. Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Bounded solutions to systems of hyperbolic equations and their approximation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2003. Vol. 42. No 8. pp.1132 - 1148.
13. Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Correct solvability of a nonlocal boundary value problem for systems of hyperbolic equations // Doklady Mathematics. 2003. Vol. 68. No 1. pp.46-49.
14. Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Unique solvability of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations // Differential Equations. 2003. Vol.39. No 10. pp.1414 - 1427.
15. Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Periodic solutions of systems of hyperbolic equations bounded on a plane // Ukrainian Mathematical Journal. 2004. Vol.56. No 4. pp. 682 - 694.
16. Dzhumabaev D.S. On the boundedness of a solution to a system of hyperbolic equations on a strip // Doklady Mathematics. 2004. Vol. 69. No 2. pp. 176-178.
17. Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posed solvability of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations // Differential Equations. 2005. Vol.41. No 3. pp.352 - 363.
18. Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2013. Vol. 402. No 1. pp. 167-178.
19. Dzhumabaev D.S. Bounded solutions of families of systems of differential equations and their approximations // Journal of Mathematical Sciences. 2008. Vol. 150. No 6. pp. 2473-2487.
20. Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M. A Parametrization method for solving nonlinear two-point boundary value problems //Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2007. Vol. 47. No 1. pp. 37-61.
21. Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M. Necessary and sufficient conditions of the existence "izolated" solution of nonlinear two-point boundary-value problem // Nonlinear Oscillations. 2012. Vol. 15. No 4. pp. 513-528.
22. Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M. Criteria for the existence of an isolated solution of a nonlinear boundary-value problem // Ukrainian Mathematical Journal. 2018. Vol. 70. No 3. pp. 410-421.
23. Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the well-posedness of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations // Differential Equations. 2010. Vol.46. No 4. pp. 553-567.
24. Dzhumabaev D.S. A Method for solving the linear boundary value problem for an integro-differential equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2010. Vol. 50. No 7. P. 1150-1161.
25. Dzhumabaev D.S. An algorithm for solving a linear two-point boundary value problem for an integro-differential equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2013. Vol. 53. No 6. P. 736-738.
26. Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the unique solvability of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations // Differential Equations. 2013. Vol. 49. No 9. pp.1087-1102.

27. Dzhumabaev D.S. Necessary and sufficient conditions for the solvability of linear boundary-value problems for the Fredholm integrodifferential equations//Ukranian Mathematical Journal. 2015. Vol. 66. No 8. pp. 1200-1219.
28. Dzhumabaev D.S. Solvability of a linear boundary value problem for a Fredholm integro-differential equation with impulsive inputs // Differential Equations. 2015. Vol. 51. No 9. pp. 1180-1196.
29. Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. On the unique solvability of the boundary value problems for Fredholm integrodifferential equations with degenerate kernel//Journal of Mathematical Sciences. 2017. Vol. 220. No 4. pp. 489-506.
30. Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2016. Vol. 294. No 2. pp. 342-357.
31. Dzhumabaev D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2018. Vol. 327. No 1. pp. 79-108.
32. Dzhumabaev D.S. Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2018. Vol. 41. No 4. pp. 1439-1462.
33. Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problem for a system of loaded hyperbolic equations and an algorithm for finding its solution // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2018. Vol. 461. No 1. pp. 817-836.
34. Dzhumabaev D.S. New general solutions of ordinary differential equations and the methods for the solution of boundary-value problems // Ukrainian Mathematical Journal. 2019. Vol. 71. No 7. pp. 1006-1031.
35. Dzhumabaev D.S., Mynbayeva S.T. New general solution to a nonlinear Fredholm integro-differential equation // Eurasian Mathematical Journal. 2019. Vol. 10. No 4. pp. 24-33.
36. Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A., Mynbayeva S.T. A method of solving a nonlinear boundary value problem with a parameter for a loaded differential equation // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2020. Vol. 43. No 2. pp. 1788-1802.
37. Dzhumabaev D.S., Mynbayeva S.T. A method of solving a nonlinear boundary value problem for the Fredholm integro-differential equation // Journal of Integral Equations and Applications. 2020. Vol. 32. No 2. pp. 317-337.
38. Assanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M. Method for Solving the Periodic problem for an Impulsive System of Hyperbolic Integro-differential Equations // International Conference «Functional analysis in interdisciplinary applications», AIP Conference Proceedings 1880 (American Institute of Physics, Melville, NY, 2017), 1880, 040004 (2017).
39. Assanova A.T., Imanchiyev A.E., Kadirbayeva Zh.M. Numerical solution of systems of loaded ordinary differential equations with multipoint conditions // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2018. Vol. 58. No. 4, pp. 508–516.
40. Assanova A.T., Kadirbayeva Z.M. On the numerical algorithms of parametrization method for solving a two-point boundary-value problem for impulsive systems of loaded differential equations // Computational and Applied Mathematics. 2018. Vol. 37. No 4, pp. 4966-4976.
41. Asanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbaeva Zh.M. On the unique solvability of a nonlocal boundary-value problem for systems of loaded hyperbolic equations with impulsive actions // Ukrainian Mathematical Journal. 2018. Vol. 69. No 8. pp. 1175-1195.
42. Assanova A.T., Iskakova N.B., Orumbayeva N.T. On the well-posedness of periodic problems for the system of hyperbolic equations with finite time delay // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2020. Vol. 43. No. 2, pp. 881-902. [43] Bakirova E.A., Iskakova N.B., Assanova A.T. Numerical method for the solution of linear boundary-value problems for integrodifferential equations based on spline approximations // Ukrainian Mathematical Journal. 2020. Vol. 71. No 9, pp. 1341-1358.

43. Assanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbayeva Z.M. Numerical solution to a control problem for integro-differential equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2020. Vol. 60. No. 2, pp. 203–221.
44. Assanova A.T., Kabdrakhova S.S. Modification of the Euler polygonal method for solving a semi-periodic boundary value problem for pseudo-parabolic equation of special type // Mediterranean Journal of Mathematics. 2020. Vol. 17. No 4. pp. 475-504.
45. Assanova A.T., Bakirova E.A., Uteshova R.E. Novel approach for solving multipoint boundary value problem for integro-differential equation // Kazakh Mathematical Journal. 2020. Vol. 20. No 1. pp. 103–124.

Assanova Anar Turmaganbetkyzy
Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling

Uteshova Roza Yessenovna
Assistant Professor
Department of Mathematical and Computer Modeling

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ И ИНЖЕНЕРИЯ ЗНАНИЙ

UDC 517.95

G.A. Abdikalikova

K.Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan

RESEARCH OF A NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM BY THE PARAMETERIZATION METHOD

Abstract. *A nonlocal boundary value problem with an integral condition for a system of second order partial differential equations is considered. Sufficient coefficients conditions of well-posed solvability of the problem are obtained by the parameterization method as well as an algorithm for finding a solution are offered.*

Keywords: *integral condition, nonlocal boundary value problem, Friedrichs, algorithm.*

Introduction

Among boundary value problems for partial differential equations, problems in which the conditions connect the desired solution and its derivatives at various points lying on the border or inside the considered area are of considerable interest. Boundary value problems with nonlocal conditions for a wide class of partial differential equations have been studied by many authors using various methods. Note the works [1]-[2], where you can find a detailed overview and bibliography on these problems.

Finding effective signs of the solvability of boundary value problems for some classes of partial differential equations, developing new effective approaches to the study of boundary value problems, and developing iterative methods for partial differential equations are relevant both for expanding the class of well-posed solvable boundary value problems, and for applying mathematical methods to the problems under study.

Boundary value problems for systems of hyperbolic equations with mixed derivative are investigated and solved by the method of introduction of functional parameters [3], which is a modification of the parameterization method [4] developed by Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor D. S. Dzhumabaev for solving boundary value problems of ordinary differential equations.

Nonlocal problems with integral conditions arise in mathematical modelling of various physical phenomena. Nonlocal boundary value problems with integral conditions for partial differential equations began to be studied relatively recently. In [5], a nonlocal boundary value problem with integral condition for a time variable for the system of hyperbolic equations with a mixed derivative is considered.

Problem statement

The nonlocal boundary value problem for the system of partial differential equations

$$D\left[\frac{\partial}{\partial x}u\right] = A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + S(x,t)u + f(x,t), \qquad u \in R^n, \tag{1}$$

$$B(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,0)\Big|_{x\in[0,\omega]} + C(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,T)\Big|_{x\in[\mathrm{T},\mathrm{T}+\omega]} + \int_0^T K(x,s)\frac{\partial u}{\partial x}(x,s)ds = d(x), \tag{2}$$

$$u(t,t)=\Psi(t), \qquad t\in[0,T] \tag{3}$$

is considered in $\overline{\Omega}=\{(x,t): t\le x\le t+\omega, 0\le t\le T\}$, $T>0$, $\omega>0$.

Here, $u(x,t)=col(u_1(x,t),u_2(x,t),...,u_n(x,t))$ is an unknown function; $D=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}$; $A(x,t)$, $S(x,t)$, $K(x,t)$ are $(n\times n)$ matrices, n is vector-function $f(x,t)$, $(n\times n)$ are matrices $B(x)$, $C(x)$, n is vector-function $d(x)$ and is function $\Psi(t)$ continuous on $\overline{\Omega}$, $[0,\omega]$, $[0,T]$ accordingly.

Let $C(\overline{\Omega},R^n)$ be a space of functions $u:\overline{\Omega}\to R^n$ that are continuous on $\overline{\Omega}$, with the norm $\|u\|_0=\max_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\|u(x,t)\|$; $\|A\|=\max_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\|A(x,t)\|=\max_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\max_{i=1,n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}(x,t)|$, $\|d\|_1=\max_{x\in[0,\omega]}\|d(x)\|$,

$\|\Psi\|_2=\max_{t\in[0,T]}\|\Psi(t)\|$.

In the present work, we investigate questions of well-posed solvability to the wide extent of the nonlocal boundary value problem (1)-(3).

Main results

Using the ideas of [3] and [5], we introduce new unknown functions [6] $v(x,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$, and the problem under study is reduced to the equivalent problem for the system of first-order hyperbolic equations

$$Dv=A(x,t)v+S(x,t)u+f(x,t), \qquad (x,t)\in\overline{\Omega}, \tag{4}$$

$$B(x)v(x,0)\big|_{x\in[0,\omega]}+C(x)v(x,T)\big|_{x\in[T,T+\omega]}+\int_0^T K(x,s)v(x,s)ds=d(x), \tag{5}$$

$$u(x,t)=\Psi(t)+\int_t^x v(\eta,t)d\eta, \qquad t\in[0,T]. \tag{6}$$

A pair $(v(x,t),u(x,t))$ of continuous functions on $\overline{\Omega}$ is called a solution to problem (4)-(6) to the wide extent of Friedrichs if the function $v(x,t)\in C(\overline{\Omega},R^n)$ has a continuous derivative with respect to t along characteristic and satisfies the family of ordinary differential equations, and condition (5), in which the functions $u(x,t)$ and $v(x,t)$ are linked by the functional relation (6).

Using the method of characteristic, we get in $\overline{H}=\{(\xi,\tau): 0\le\xi\le\omega, 0\le\tau\le T\}$, $T>0$, $\omega>0$:

$$\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tau}=\tilde{A}(\xi,\tau)\tilde{v}+\tilde{S}(\xi,\tau)\tilde{u}(\xi,\tau)+\tilde{f}(\xi,\tau), \qquad \tau\in[0,T], \tag{7}$$

$$\tilde{B}(\xi)\tilde{v}(\xi,0)+\tilde{C}(\xi)\tilde{v}(\xi,T)+\int_0^T\tilde{K}(\xi,\tau)\tilde{v}(\xi,\tau)d\tau=\tilde{d}(\xi), \qquad \xi\in[0,\omega], \tag{8}$$

$$\tilde{u}(\xi,\tau)=\Psi(\tau)+\int_\tau^{\xi+\tau}\tilde{v}(\varsigma,\tau)d\varsigma, \qquad \tau\in[0,T], \tag{9}$$

where $\tilde{v}(\xi,\tau)=v(\xi+\tau,\tau)$, $\tilde{u}(\xi,\tau)=u(\xi+\tau,\tau)$, $\tilde{A}(\xi,\tau)=A(\xi+\tau,\tau)$, $\tilde{S}(\xi,\tau)=S(\xi+\tau,\tau)$, $\tilde{K}(\xi,\tau)=K(\xi+\tau,\tau)$, $\tilde{f}(\xi,\tau)=f(\xi+\tau,\tau)$; the $(n\times n)$ matrices $\tilde{A}(\xi,\tau)$, $\tilde{S}(\xi,\tau)$, $\tilde{K}(\xi,\tau)$, n-vector-function $\tilde{f}(\xi,\tau)$ is continuous on $\overline{H}$; $(n\times n)$ are matrices $\tilde{B}(\xi)$, $\tilde{C}(\xi)$, n-vector-function $\tilde{d}(\xi)$ is continuous on $[0,\omega]$, and n-vector-function $\Psi(\tau)$ is continuously differentiable on $[0,T]$.

Let $C(\overline{H},R^n)$ be the space of continuous functions $\tilde{v}:\overline{H}\to R^n$ on $\overline{H}$ with norm $\|\tilde{v}\|_0=\max_{\xi\in[0,\omega]}\max_{\tau\in[0,T]}\|\tilde{v}(\xi,\tau)\|$.

A continuous function $\tilde{v}(\xi,\tau)$ on $\overline{H}$ is called a solution to problems (7)-(9) if the function $\tilde{v}(\xi,\tau)\in C(\overline{H},R^n)$ has a continuous derivative with respect to τ and satisfies the family of boundary value problems for the system of ordinary differential equations, and condition (8), in which the functions $\tilde{u}(\xi,\tau)$ and $\tilde{v}(\xi,\tau)$ by the functional relation (9).

A continuous function $u(x,t)=\tilde{u}(x-t,t)$ on $\overline{\Omega}$ is called a solution to the wide extent of boundary value problems for the system of partial differential equations (1) with nonlocal integral conditions (2) and (3).

For solving boundary value problems (7)-(9), we offer the following algorithm.

Step-0: in (7) accepting $\tilde{u}(\xi,\tau)=\Psi(\tau)$, and solving boundary value problems (7)-(8) we shall define initial approach $\tilde{v}^{(0)}(\xi,\tau)$. Using the $\tilde{v}(\xi,\tau)=\tilde{v}^{(0)}(\xi,\tau)$ from correlation (9) find $\tilde{u}^{(0)}(\xi,\tau)$.

Step-1: taking $\tilde{u}(\xi,\tau)=\tilde{u}^{(0)}(\xi,\tau)$ in the right-hand side of (7) and solving boundary value problems (7)-(8), we define initial approximation $\tilde{v}^{(1)}(\xi,\tau)$. Substituting in (9) the function $\tilde{v}^{(1)}(\xi,\tau)$ found, we find $\tilde{u}^{(1)}(\xi,\tau)$.

And so on.

On step k : continuing this process we get $\left(\tilde{v}^{(k)}(\xi,\tau),\tilde{u}^{(k)}(\xi,\tau)\right)$.

On each step of the offered algorithm we use the parameterization method [4].For fixed $\tilde{u}(\xi,\tau)$, $\xi\in[0,\omega]$, problems (7)-(8) become the problems for equations

$$\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tau}=\tilde{A}(\xi,\tau)\tilde{v}+\tilde{G}(\xi,\tau),\qquad \tau\in[0,T] \tag{10}$$

with condition (8).

A continuous function $\tilde{v}:\overline{H}\to R^n$ that has a continuous derivative with respect to τ on $\overline{H}$ is called a solution of the family of two point boundary value problems (10) and (8) if it satisfies system (10) and condition (8) for all $(\xi,\tau)\in\overline{H}$ and $\xi\in[0,\omega]$, respectively.

Definition 1. A family of two point boundary value problems (10) and (8) is said to be well-posed and solvable if it has a unique solution $\tilde{v}(\xi,\tau)\in C(\overline{H},R^n)$ for any functions $\tilde{G}(\xi,\tau)$ and $\tilde{d}(\xi)$ and this solution satisfies the estimate

$$\max_{\tau\in[0,T]}\|\tilde{v}(\xi,\tau)\|\le\tilde{K}(\xi)\max\left(\max_{\tau\in[0,T]}\|\tilde{G}(\xi,\tau)\|,\|\tilde{d}\|_1\right),$$

where $\tilde{K}(\xi)$ is a continuous function on $[0,\omega]$ independent of $\tilde{G}(\xi,\tau)$ and $\tilde{d}(\xi)$.

Definition 2. The boundary value problems (1)-(3) are said to be well-posed solvable if they have a unique solution $u^*(x,t)\in C(\overline{\Omega},R^n)$ for any functions $f(x,t)$, $d(x)$ and $\Psi(t)$ and this solution satisfies the estimate

$$\max\left(\|u\|_0,\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_0\right)\le K\max\left(\|f\|_0,\|d\|_1,\|\Psi\|_2\right),$$

where $K=const$ independent of $f(x,t)$, $d(x)$, $\Psi(t)$.

To solve families of two-point boundary value problems for ordinary differential equations, the method of parameterization [4] is used.

Sufficient conditions are obtained for the unique and well-posed solvability of the problem in the terms of invertibility of the matrix, and boundary condition.

Since problems (7)-(9) are equivalent to problems (4)-(6), as well as boundary value problems (4)-(6) being equivalent to (1)-(3), the nonlocal boundary value problem with integral condition for the system of partial differential equations of the second order (1)-(3) has the unique solution $u^*(x,t)\in C(\overline{\Omega},R^n)$.

Theorem. *Let boundary value problems (10) and (8) be well-posed. Then the sequence* $\left(\tilde{v}^{(k)}(\xi,\tau),\tilde{u}^{(k)}(\xi,\tau)\right)$ *converges to the unique solution of problems (7)-(9), and nonlocal boundary value problems (1)-(3) are solvable in the wide extent.*

Conclusion

When investigating and solving a nonlocal boundary value problem for a system of partial differential equations, the parameterization method is used, which allows us to establish the well-posed solvability of the problem along with unique solvability. The coefficient conditions for well-posed solvability of a nonlocal boundary value problem for a system of equations are established. Sufficient conditions for the well-posed solvability of a boundary value problem with a nonlocal condition are established in terms of a matrix formed through the right side of the equation system and the boundary condition.

If a solution built to the wide extent, is continuously differentiable with respect to x and t, i.e. $u(x,t)$ has continuous partial derivatives $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $D\left[\frac{\partial}{\partial x}u\right]$ and satisfies equation (1) for all $(x,t)\in\overline{\Omega}$ and conditions (2)-(3), then it is a classical solution of nonlocal boundary value problems (1)-(3).

REFERENCES

1. Nakhushev, A.M. Problems with displacement for partial differential equations. M.: Nauka, 2006. 287 p.
2. Ptashnyck, B.I. Ill-posed boundary value problems for partial differential equations. Kyev: Naukova Dumka, 1984. 264 p.
3. Asanova, A.T., Dzhumabaev, D.S. Well-posed solvability of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations //Differential equations. – 2005. – №3(41). – P.337-346.
4. Dzhumabaev, D.S. Criteria of unique solvability for a linear boundary value problem for ordinary differential equations //J.Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 1989. – №1(29). – P. 50-66.
5. Asanova, A.T., Dzhumabaev, D.S.Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations //Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2013. – №1(402). – P. 167-178.
6. Abdikalikova, G.A. On solvability of one nonlocal boundary value problem.Mathematical journal. – 2005. – №3(5). – P. 5–10.

Абдикаликова Г.А.

Исследование нелокальной краевой задачи методом параметризации

Аннотация. Рассматривается нелокальная краевая задача с интегральным условием для системы уравнений в частных производных второго порядка.

Методом параметризации получены коэффициентные достаточные условия корректной разрешимости задачи, а также предложен алгоритм нахождения решения.

Ключевые слова: интегральное условие, нелокальная краевая задача, Фридрихс, алгоритм.

Абдикаликова Г.А.

Параметрлеу әдісі арқылы локалды емес шеттік есепті зерттеу

Аңдатпа: Екінші ретті дербес туындылы теңдеулер жүйесі үшін интегралдық шартты локалды емес шеттік есеп қарастырылған. Параметрлеу әдісі арқылы есепің корректілі шешілімділігінің жеткілікті шарттары алынған және шешімді табу алгоритмі ұсынылған.

Түйінді сөздер: интегралдық шарт, локалды емес шеттік есеп, Фридрихс, алгоритм.

Сведения об авторе:
Абдикаликова Галия Амиргалиевна, Актюбинский региональный университет им. К.Жубанова, кандидат физико-математических наук, доцент.

About author:
Abdikalikova Galiya Amirgaliyevna, K.Zhubanov Aktobe Regional University, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor.

UDC 517.956

Imanchiyev A.E.[1,*], Abildayeva A.D.[2], Minglibayeva B.B.[2]

[1]K.Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan
[2]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

DZHUMABAEV PARAMETERIZATION METHOD FOR SOLVING AN INITIAL–BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR HIGHER ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract. *We consider an application of the Dzhumabaev parameterization method for solving initial-boundary value problems for higher order partial differential equations with two variables. These problems are reduced to nonlocal problems for system of hyperbolic equations of second order with mixed derivatives, or to the family of boundary value problems for hybrid systems consisting of first order partial differential equations, or systems of ordinary differential equations with a parameter and functional relations. A family of multipoint boundary value problems for higher order differential equations is solved by the Dzhumabaev parameterization method. The methods and results are developed to nonlocal problems for higher order partial differential equations with loading and delay arguments, nonlocal problems with integral conditions and impulse effects for higher order partial differential equations.*

Key words: *initial-boundary value problems, higher order partial differential equations, Dzhumabaev parameterization method, system of hyperbolic equations second order, nonlocal problems, unique solvability.*

Introduction.

The Dzhumabaev parameterization method was created for investigating and solving linear boundary value problems for systems of ordinary differential equations [1]. On the basis of this method, the coefficient criteria for unique solvability of linear two-point boundary value problems for systems of ordinary differential equations were established. The Dzhumabaev parameterization method and these results were developed to various classes of boundary value problems for differential equations [2-11]. Further, the Dzhumabaev parameterization method was extended to the linear two-point boundary value problems for integro-differential equations. Application of the Dzhumabaev parameterization method made it possible to establish necessary and sufficient conditions for the solvability and unique solvability of linear boundary value problems for ordinary Fredholm integro-differential equations [12-16]. Algorithms of the parameterization method for solving these problems are proposed in [17, 18]. These results are extended to nonlinear boundary value problems for ordinary Fredholm integro-differential equations and loaded differential equations [19-22]. Necessary and sufficient conditions for solvability and the unique solvability of these problems are received.

The theory of nonlocal boundary value problems for systems of second order hyperbolic equations has been developed in the work of many authors. At present, different conditions for solvability of nonlocal boundary value problems for hyperbolic equations have been received. Criteria for unique solvability of some classes of linear boundary value problems for hyperbolic equations with variable coefficients have been obtained quite recently. We are proposing a method of introducing of functional parameters for solving nonlocal boundary value problems for ayatem of hyperbolic equations of the second order. The method of introduction of functional parameters is a modification and generalization of the Dzhumabaev parameterization method to partial differential equations with two variables. By means of the method of introduction of functional parameters, the nonlocal boundary value problems for the systems of hyperbolic equations with mixed derivatives were investigated, the algorithms for finding the solutions are constructed, and the conditions for the existence of unique classical solution to the considered problem are obtained [23-25].

Using new unknown functions in [26, 27] the nonlocal boundary value problem with data on the characteristics for the systems of hyperbolic equations was reduced to the problem, which consists of a family of two-point boundary value problems for ordinary differential equations and the functional relations. It is established that the well-posed solvability of nonlocal boundary value problems with data on the characteristics for the systems of hyperbolic equations is equivalent to the well-posed solvability of a family of two-point boundary value problems for the systems of ordinary differential equations. Criteria of well-posed solvability of linear nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations with mixed derivatives in terms of initial data are obtained. These results are extended to a nonlocal boundary value problem with integral condition for the system of hyperbolic equations [28], nonlocal boundary value problems for system of loaded hyperbolic equations [29] and periodic problems for the system of hyperbolic equations with finite time delay [30].

Main results.

Currently, the problems of mathematical physics connected with the description of the wave motion of liquids of different nature are drawing great attention. This interest is caused not only by the significant applied importance of these problems, but their new theoretical and mathematical content often do not have analogues in classical mathematical physics. One of the important classes of such problems are the initial-boundary value problems for higher order partial differential equations. To date, various methods for researching and solving the initial-boundary value problems for higher order partial differential equations of hyperbolic and composite types have been developed (see bibliography in [31]). In order to investigate various boundary value problems for higher order partial differential equations along with the classical methods of mathematical physics (the Fourier method, the method of Green's functions, Poincare's metric concept) we apply the method of differential inequalities and other methods of qualitative theory of ordinary differential equations. Based on them, the conditions for solvability of considered boundary value problems are obtained, and the ways for finding their solutions are offered. However, finding the effective signs of unique solvability of initial-boundary value problems, the analog of multipoint boundary value problems for higher order partial differential equations, still remains an active problem.

It is known that higher order ordinary differential equations can be reduced to a system of first order ordinary differential equations by replacement. Using the methods of the qualitative theory of differential equations for the received system conditions of solvability can be formulated in the terms of a fundamental matrix of a differential part or the right part of system . A similar approach can be applied to higher order hyperbolic equations with two independent variables and the equations can be reduced to the system of second order hyperbolic equations with mixed derivatives by replacement. Then, using the known methods for solving boundary value problems for systems of hyperbolic equations with mixed derivatives, the conditions of solvability can be established in different terms. Mathematical modeling of many problems of physics, mechanics, chemistry, biology, etc., resulted in the necessity of research of multipoint and nonlocal boundary value problems for higher order partial differential equations of the hyperbolic type. Applying the methods of qualitative theory of differential equations directly to these problems, we can establish conditions of their solvability. Also by means of replacement, the multipoint and nonlocal boundary value problems for higher order partial differential equations of the hyperbolic type are reduced to the nonlocal boundary value problems for systems of second order hyperbolic equations.

In the present paper, the Dzhumabaev parameterization method and its modifications are the basic methods used to investigate and solve the initial-boundary value problems for higher order partial differential equations. We establish the conditions for unique solvability of initial-boundary value problems, the analog of multipoint boundary value problems for higher order partial differential equations of the hyperbolic type. Criteria for the well-posed solvability of family of multipoint boundary value problems for higher order differential equations are received. Special attention in the article is given to the initial-boundary value problems for third and fourth order partial differential equations, which often arise in the mathematical modeling of processes of the movement of stratified liquid, during investigation research of an ion-sound wave in non-magnetized plasma, and when studying the wave processes in various environments and rheological schemes of crust [32-38]. Conditions for the solvability of initial-boundary value problems, and of nonlocal boundary value problems for these equations are obtained by the method of characteristics, Riemann's method, the method of Green's functions and differential inequalities. The conditions for the unique solvability of initial-boundary value problems and analog multipoint boundary value problems for third and fourth order partial differential equations are established in the terms of solvability to nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations of the second order. Considered problems also are reduced to the family of boundary value problems for hybrid systems consisting of first order partial differential equations and ordinary differential equations with parameter and functional relations. On the basis of the Dzhumabaev parameterization method, the algorithms for finding the solution and coefficient conditions for the well-posed solvability of investigated problem are proposed.

The theory of boundary value problems for higher order partial differential equations is closely related to the theory of boundary value problems for higher order ordinary differential equations. Conditions for the existence of solutions to the boundary value problem and Vallee-Poussin problem for higher order hyperbolic equations are established, using the properties (the existence of solutions, uniqueness of solutions, the continuous dependence on initial data) of the family of corresponding homogeneous boundary value problems for higher order ordinary differential equations. Applying the method of the introduction of functional parameters to the nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations also led to the family of boundary value problems for ordinary differential equations. Using the fact that well-posed solvability of boundary value problems with data on the characteristics for systems of hyperbolic equations is equivalent to the well-posed solvability of the family of two-point boundary value problems for ordinary differential equations, made it possible to establish a criterion for well-posed solvability. In addition, the families of boundary value problems for higher order ordinary differential equations are of independent interest as non-Fredholm problems. In this regard, the project will investigate the family of multipoint boundary value problems for higher order differential equations by the Dzhumabaev parameterization method. On the basis of this method, the coefficient criteria for unique solvability of linear regular boundary value problems for the systems of ordinary differential equations were established. By means of modification of the parameterization method, the algorithms for finding the solutions are proposed, and the conditions for well-posed solvability of the family of multipoint boundary value problems for higher order differential equations in terms of the initial data are established [39, 40].

The principal difference between the Dzhumabaev parameterization method and these results from the existing analogs consists in the establishment of coefficient conditions for the existence of solutions to the specified problems and in the construction effective algorithms for finding their solutions.

Thus, the Dzhumabaev parameterization method and its modifications for finding the approximate solutions to the initial-boundary value problems, the families of multipoint boundary value problems for higher order differential equations, the boundary value problems for higher order hyperbolic equations with loading and with a delay argument, the nonlocal problems with integral conditions, with impulse effects of higher order partial differential equations will be offered, and the conditions for the existence of a solution in the terms of initial data will be established.

Conclusion

The theory of boundary value problems for higher order partial differential equations is actively developing, and it finds numerous applications in various fields of applied mathematics. Works of many authors are devoted to the research of these problems and development of methods for finding their solutions. Study of the qualitative properties of initial-boundary value problems, multipoint boundary value problems and the development of effective methods for finding their solutions are the main problems of this theory. The coefficient conditions for unique solvability of initial-boundary value problems and a family of multipoint boundary value problems for higher order partial differential equations, which will be established as well as the approximate methods which will be developed in this paper, will become a powerful contribution to the theory of boundary value problems for higher order partial differential equations.

Funding: The work was supported by grant №AP05131220 of Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (2018-2020).

REFERENCES

1. Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // U.S.S.R. computational mathematics and mathe-matical physics. 1989. Vol. 29. No 1. pp. 34-46.
2. Dzhumabaev D.S. Approximation of a bounded solution of a linear ordinary differential equation by solutions of two-point boundary value problems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1990. Vol.30. No 2. pp. 34-45.
3. Dzhumabaev D.S. Approximation of a bounded solution and exponential dichotomy on the line // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1990. Vol.30. No 6. pp. 32-43.
4. Dzhumabaev D.S. Singular boundary value problems and their approximation for nonlinear ordinary differential equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1992. Vol. 32. No 1. pp. 10-24.
5. Dzhumabaev D.S. Estimates for the approximation of singular boundary problems for ordinary differential equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1998. Vol. 38. No 11. pp. 1739-1746.
6. Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M. A parametrization method for solving nonlinear two-point boundary value problems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2007. Vol. 47. No 1. pp. 37-61.
7. Dzhumabaev D.S. Bounded solutions of families of systems of differential equations and their approximations // Journal of Mathematical Sciences. 2008. Vol. 150. No 6. pp. 2473-2487.
8. Dzhumabaev D.S. Temesheva S.M. Necessary and sufficient conditions of the existence "izolated" solution of nonlinear two-point boundary-value problem // Nonlinear Oscillations. 2012. Vol. 15. No 4. pp. 513-528.
9. Dzhumabaev D.S. Abil'daeva A.D. Properties of the isolated solutions bounded on the entire axis for a system of nonlinear ordinary differential equations // Ukrainian Mathematical Journal. 2017. Vol. 68. No 8. pp. 1297-1304.
10. Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M. Criteria for the existence of an isolated solution of a nonlinear boundary-value problem // Ukrainian Mathematical Journal. 2018. Vol. 70. No 3. pp. 410-421.
11. Dzhumabaev D.S., Uteshova R.E. A limit with weight solution in the singular point of a nonlinear ordinary differential equation and its property // Ukrainian Mathematical Journal. 2018. Vol. 69. No 12. pp. 1717-1722.

12. Dzhumabaev D.S. A method for solving the linear boundary value problem for an integro-differential equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2010. Vol. 50. No 7. pp. 1150-1161.
13. Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the well-posedness of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations // Differential equations. 2010. Vol. 46. No 4. pp. 553-567.
14. Dzhumabaev D.S. An algorithm for solving a linear two-point boundary value problem for an integrodifferential equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2013. Vol. 53. No 6. pp. 736-758.
15. Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the unique solvability of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations // Differential Equations. 2013. Vol. 49. No 9. pp. 1087-1102.
16. Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2016. Vol. 294. P. 342-357.
17. Dzhumabaev D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2018. Vol. 327. pp. 79-108.
18. Dzhumabaev D.S. Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2018. Vol. 41. No 4. pp. 1439-1462.
19. Dzhumabaev D.S. New general solutions of ordinary differential equations and the methods for the solution of boundary-value problems // Ukrainian Mathematical Journal. 2019. Vol. 71. No 7. pp. 1006-1031.
20. Dzhumabaev D.S. Mynbayeva S.T. New general solution to a nonlinear Fredholm integro-differential equation // Eurasian Mathematical Journal. 2019. Vol. 10. No 4. pp. 24-33.
21. Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A., Mynbayeva S.T. A method of solving a nonlinear boundary value problem with a parameter for a loaded differential equation // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2020. Vol. 43. No 2. pp. 1788-1802.
22. Dzhumabaev D.S., Mynbayeva S.T. A method of solving a nonlinear boundary value problem for the Fredholm integro-differential equation // Journal of Integral Equations and Applications. 2020. Vol. 32. No 2. pp. 317-337.
23. Asanova A.T. Dzhumabaev D.S. Unique solvability of the boundary value problem for systems of hyperbolic equations with data on the characteristics // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2002. Vol.42. No 11. pp. 1609-1621.
24. Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Bounded solutions to systems of hyperbolic equations and their approximation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2003. Vol. 42. No 8. pp. 1132-1148.
25. Asanova A.T. Dzhumabaev D.S. Unique solvability of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations // Differential Equations. 2003. Vol.39. No 10. pp. 1414-1427.
26. Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Correct solvability of a nonlocal boundary value problem for systems of hyperbolic equations // Doklady Mathematics. 2003. Vol. 68. No 1. pp. 46-49.
27. Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posed solvability of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations // Differential Equations. 2005. Vol. 41. No 3. pp.352-363.
28. Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2013. Vol. 402. No 2. pp. 167–178.
29. Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problem for a system of loaded hyperbolic equations and an algorithm for finding its solution // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2018. Vol. 461. No 1. pp. 817-836.

30. Assanova A.T., Iskakova N.B., Orumbayeva N.T. On the well-posedness of periodic problems for the system of hyperbolic equations with finite time delay // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2020. Vol. 43. No. 2. pp. 881-902.
31. Ptashnyck B.I. Ill-posed boundary value problems for partial differential equations, naukova dumka: Kiev, Ukraine, 1984. (in russ)
32. Assanova A.T., Sabalakhova A.P. Toleukhanova Z.M. On the solving of initial-boundary value problem for system of partial differential equations of the third order // News of the National Academy of Sciences of the RK- Series Physico-Mathematical. 2018. Vol. 3. No 319. pp. 67–73.
33. Assanova A.T., Imanchiyev A.E. On the unique solvability of a family of multipoint-integral boundary value problems for a third order differential equation // Bulletin of the Karaganda university - Series Mathematics. 2018. Vol. 90. No 2. pp. 25-33.
34. Assanova A.T., Alikhanova B.Zh., Nazarova K.Zh. Well-posedness of a nonlocal problem with integral conditions for third order system of the partial differential equations // News of the National Academy of Sciences of the RK- Series Physico-Mathematical. 2018. Vol. 5. No 321. pp. 33–41.
35. Assanova A. T.; Boichuk A. A. Tokmurzin Z. S. 1 On the initial-boundary value problem for system of the partial differential equations of fourth order // News of the National Academy of Sciences of the RK. Physico-Mathematical Series. 2019. Vol. 1. No. 323. pp. 14-21.
36. Assanova A.T. Solution of initial-boundary value problem for a system of partial differential equations of the third order // Russian Mathematics. 2019. Vol. 63. No. 4. pp. 12-22.
37. Assanova A.T. On the solvability of nonlocal problem for the system of Sobolev-type differential equations with integral condition // Georgian Mathematical Journal. DOI: 10.1515/gmj-2019-2011. Published Online: 02/ 19/ 2019. (to appear)
38. Assanova A.T., Imanchiyev A.E., Kadirbayeva Z.M. Solvability of Nonlocal Problems for Systems of Sobolev-Type Differential Equations with a Multipoint Condition // Russian Mathematics. 2019. Vol. 63. No. 12. pp. 1-12.
39. Assanova A.T., Iskakova N.B., Orumbayeva N.T. Solvability of a periodic problem for the fourth order system of partial differential equations with time delay // Kazakh Mathematical Journal. 2019. Vol. 19. No 2. pp. 14-21.
40. Assanova A.T., Tokmurzin Zh.S. On two-point initial boundary value problem for fourth order partial differential equations // // Kazakh Mathematical Journal. 2019. Vol. 19. No 3. pp. 66-78.
41. Assanova A. T. Imanchiyev A. E. Kadirbayeva Z. M. A nonlocal problem for loaded partial differential equations of fourth order // Bulletin of the Karaganda University-Mathematics. 2020. Vol. 97. No. 1. pp. 6-16.
42. Assanova A. T., Abildayeva A. D., Sabalakhova A. P. An initial-boundary value problem for a higher-order partial differential equation // News of the National Academy of Sciences of the RK - Series Physico-Mathematical. 2020. Vol. 2. No 330. pp. 133-141.
43. Abildayeva A.D., Assanova A.T., Minglibayeva B.B. An existence solution to an identification parameter problem for higher-order partial differential equations // International Journal of Mathematics and Physics. 2020. Vol. 11. No 1. pp. 28-35.
44. Assanova A.T., Tleulessova A.B. Nonlocal problem for a system of partial differential equations of higher order with pulsed actions // ukrainian mathematical journal. 2020. vol. 71. no 12. pp. 1821–1842.

Иманчиев А.Е.[*], Абильдаева А.Д., Минглибаева Б.Б.

Жоғарғы ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есептерді шешуге арналған Жұмабаевтың параметрлеу әдісі

Аңдатпа: Екі айнымалысы бар жоғарғы ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есептерді шешуге арналған Жұмабаевтың параметрлеу әдісінің кейбір қолданыстары қарастырылады. Бұл есептер аралас туындылы гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін бейлокал есептерге, немесе бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерден тұратын гибридті жүйелер үшін шеттік есептер әулетіне, немесе параметрлері бар жай дифференциалдық теңдеулер жүйелері мен функционалдық қатынастарға келтіріледі. Жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер үшін көпнүктелі шеттік есептер әулеті Жұмабаевтың параметрлеу әдісі арқылы шешіледі. Әдістер мен алынған нәтижелер жүктемелері мен кешігулі аргументтері бар жоғарғы ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал есептерге, жоғарғы ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін интегралдық шарттары мен импульстік әсерлері бар бейлокал есептерге дамытылады.

Түйінді сөздер: бастапқы-шеттік есептер, жоғарғы ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер, Жұмабаевтың параметрлеу әдісі, екінші ретті гиперболалық теңдеулер жүйесі, бірмәнді шешілімділік

Иманчиев А.Е.[*], Абильдаева А.Д., Минглибаева Б.Б.

Метод параметризации Джумабаева решения начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка

Аннотация. Рассматриваются некоторые применения метода параметризации Джумабаева для решения начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка с двумя переменными. Эти задачи сводятся к нелокальным задачам для системы гиперболических уравнений второго порядка со смешанными производными, или к семейству краевых задач для гибридных систем, состоящих из дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, или к системам обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами и функциональным соотношениям. Семейство многоточечных краевых задач для дифференциальных уравнений высокого порядка решается методом параметризации Джумабаева. Методы и полученные результаты развиты на нелокальные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка с нагружениями и запаздывающими аргументами, нелокальные задачи с интегральными условиями и импульсными воздействиями для уравнений в частных производных высокого порядка.

Ключевые слова: начально-краевые задачи, дифференциальные уравнения в частных производных высокого порядка, метод параметризации Джумабаева, система гиперболических уравнений второго порядка, однозначная разрешимость.

About authors:

Askarbek E. Imanchiyev, PhD, Associate Professor, Department of Mathematics, K.Zhubanov Aktobe Regional University, Leading researcher of Differential Equations Department, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling.

Aziza D. Abildayeva, PhD, Leading researcher of Differential Equations Department, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling.

Bayan B. Minglibayeva, PhD, Senior researcher of Differential Equations Department, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling.

Сведения об авторах:

Иманчиев Аскарбек Ермекович, кандидат физико-математических наук, Актюбинский регио-нальный университет им. К.Жубанова, доцент кафедры математики.

Абильдаева Азиза Даркамбаевна, кандидат физико-математических наук, Институт матема-тики и математического моделирования, ВНС Отдела дифференциальных уравнений.

Минглибаева Баян Балтабаевна, кандидат физико-математических наук, Институт математики и математического моделирования, СНС Отдела дифференциальных уравнений.

UDC 517.624

A.B. Tleulessova[1,2]
[1]Gumilev Eurasian National University, Astana, Kazakhstan
[2]Institute of Mathematics and Mathematical Modelling, Almaty

ON THE CORRECT SOLVABILITY OF A LINEAR TWO-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH IMPULSE ACTION BY THE PARAMETERIZATION METHOD

Abstract. *A linear two-point boundary value problem with impulse action for a system of ordinary differential equations is considered. The necessary and sufficient conditions for the correct solvability of the problem are established.*

Key words: *boundary value problem, impulse, parameterization method, correct solvability*

Mathematical modeling of the evolution of real processes with short-term disturbances, the duration of which can be neglected, leads to the need to study differential equations with impulse effects.

Such problems attracted the attention of scientists as early as the end of the 19th and beginning of the 20th centuries, at the stage of the formation of nonlinear mechanics, and first of all aroused the attention of physicists with the possibility of an adequate description of processes in nonlinear oscillatory systems. Intensive development of the latest technology has led to an increase in the interest of mathematicians in the further study of systems with discontinuous trajectories. Examples of applications include pulse control systems, pulse computing systems, etc. The research results are used in many engineering, technical, economic, biomedical and other problems.

It is known that the presence of an impulse significantly affects the solvability properties of boundary value problems and the properties of their solutions. For example, Perestyuk showed the positive effect of the impulse action on the continuability of a solution of a nonlinear ordinary differential equation. The dissertation contains examples showing both the positive and negative influence of the impulse on the solvability of periodic boundary-value problem for an ordinary differential equation. This fact, among others, generates the urgent problem of researching properties and developing algorithms for finding solutions to boundary value problems with impulse effect. The qualitative theory of differential equations with impulse effects dates back to works by A. D. Myshkis, A. M. Samoilenko [3], A. Khalanai, D. Veksler [4] and other mathematicians. The theory of boundary value problems for ordinary differential equations with impulse action was substantially developed in the works of the Kiev school of mathematicians. Boundary and periodic boundary value problems for ordinary differential equations with impulse effect are considered in the works of A.M. Samoilenko, A.A. Perestyuk, Shavkoplyas, Trofimchuk, Rogovchenko, Karanjulov and other mathematicians. Various methods have been developed and applied by them both to investigate the solvability of boundary value problems with impulsive effect, and to find their solution.

In particular, a numerical - analytical method proposed by A.M.Samoilenko for ordinary differential equations with impulsive effect is widely used. We note that using the general solution of a system of ordinary differential equations allows us to obtain the necessary and sufficient conditions for the unique solvability of a linear boundary-value problem with impulse effect in terms of the fundamental matrix. However, given that it is possible to construct the fundamental matrix for systems of differential equations with variable coefficients in rare cases, this criterion for the unique solvability is applicable only for a narrow class of boundary value problems. For nonlinear boundary value problems with impulsive effect, only sufficient conditions for their solvability are established, which allow us to study classes of boundary value problems that satisfy certain assumptions. If the general solution of the considered system of nonlinear ordinary differential equations is known, then using the conditions of the impulse effect condition and boundary conditions, we can construct a system of nonlinear equations with respect to arbitrary constants. The solvability of the problem will be equivalent to the existence of a solution to the constructed system. Since for non-linear systems of ordinary differential equations, as a rule, a general solution cannot be found, this sign of solvability of a nonlinear boundary value problem with impulsive effect is applicable in exceptional cases.

Therefore, we study the following questions:

1) To obtain coefficient criteria for the unique solvability of a linear two-point boundary value problem with impulse action without using fundamental matrix;

2) To establish necessary and sufficient conditions for the existence of an isolated solution of a periodic boundary problem for a nonlinear system of ordinary differential equations with impulse action in terms of the input data;

3) To build effective algorithms for solving boundary value problems for systems of ordinary differential equations with impulse action.

These issues are resolved based on the parameterization method proposed by D.S. Dzhumabaev.

On the interval $[0,T]$, we consider the linear two-point boundary value problem with an impulse action at fixed moments of time for a system of ordinary differential equations

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), t \in [0,T]\backslash\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}, \theta_i \in (0, T), i = \overline{1,m}, x \in R^n \quad (1)$$

$$B_0x(0) + C_0x(T) = d, d \in R^n, \quad (2)$$

$$B_ix(\theta_i - 0) - C_ix(\theta_i + 0) = p_i, p_i \in R^n, \quad (3)$$

where the matrix $A(t)$ and the vector function $f(t)$ are piecewise continuous on $[0,T]$ with possible discontinuity points of the first kind θ_i, $i = \overline{1,m}$, B_i, C_i, $i = (\overline{0,m})$ are constant matrices; $\|x\| = \max\limits_i |x_i|$, $\|A(t)\| = \max\limits_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(t)| \le \alpha$, $\|f(t)\|_1 = \max\limits_{t\in[0,T]} \|f(t)\|$.

A solution of problem (1)-(3) is piecewise continuously differentiable on $[0,T]$ vector function $x(t)$, which satisfies the differential equation (1) on $[0,T]$ except points θ_i, as well as conditions (2) and (3). By $\tilde{C}([0,T], R^n)$ we denote the space of piecewise continuous on $[0,T]$ function $x\colon [0,T] \to R^n$ with the norm $\|x\|_2 = \max\limits_{i\in[0,m]} \sup\limits_{t\in[\theta_i,\theta_{i+1})} \|x(t)\|$, where $\theta_0 = 0, \theta_{m+1} = T$.

The need to study boundary value problems for systems of differential equations with impulse action is caused by many problems of physics, engineering and biology, which describe real processes subject to impulse effect. A review and bibliography of works devoted to the study of systems of differential equations with impulsive effect can be found in [1-6]. In [7], a periodic problem with a pulsed effect at an internal point of the interval was studied by the parameterization method [8]. Algorithms for finding a solution are proposed and sufficient conditions for their convergence are established, that provide the unique solvability of the problem under consideration. In [9], algorithms were proposed for finding a solution to problems (1) - (3) in terms of the matrix $Q_\nu(h_1, h_2, \dots, h_{m+1})$, $\nu \in N$, $h_j = \theta_j - \theta_{j-1}$, $j = \overline{1, m+1}$, $\theta_0 = 0$, $\theta_{m+1} = T$, composed of the matrices $A(t)$, B_i, C_i, $i = (\overline{0,m})$, and θ_j, the conditions for their convergence were obtained. Criteria for the unique solvability of problem (1) - (3) were established in terms of the matrix $Q_\nu(h_1, h_2, \dots, h_{m+1})$. In the present work, the effect of changing the partition step for a fixed algorithm for convergence, ν, leads to the unique solvability of problems (1) - (3).

Let us take a number $l \in N$ and make the partition $[0,T) = \bigcup_{r=1}^{(m+1)l} [t_{r-1}, t_r)$, $t_0 = 0$, $t_r = t_{r-1} + \frac{h_1}{l}$, $r = \overline{1,l}$, $t_r = t_{r-1} + \frac{h_2}{l}$, $r = \overline{l+1, 2l}$, …, $t_r = t_{r-1} + \frac{h_{m+1}}{l}$, $r = \overline{ml+1, (m+1)l}$, $h^0 = \max\limits_{i=\overline{1,m+1}} h_i$, $h_i = \min\limits_{i=\overline{1,m+1}} h_i$, $\delta = \frac{h^0}{h_0}$.

By $x_r(t)$ we denote the restriction of the function $x(t)$ to the partition subinterval $[t_{r-1}, t_r)$ and reduce problems (1) - (3) to a multipoint boundary value problem with an impulse effect.

$$\frac{dx_r}{dt} = A(t)x_r + f(t), \ t \in [t_{r-1}, t_r), \ r = \overline{1,(m+1)l}, \tag{4}$$

$$B_0 \lim_{t\to t_{il}-0} x_1(0) + C_0 \lim_{t\to T-0} x_{(m+1)l}(t) = d, \tag{5}$$

$$B_i \lim_{t\to t_{il}-0} x_{il}(t) - C_i x_{il}(t_{il+1}) = p_i, \ i = \overline{1,m}. \tag{6}$$

$$\lim_{t\to t_s-0} x_s(t) = x_{s+1}(t_s), \ s = \{\overline{1,(m+1)l-1}\} \backslash \{il\}, \ i = \overline{1,m}. \tag{7}$$

Here (7) are the conditions for matching the solution at the interior points of the partition.

If $x(t)$ is a solution to problems (1) - (3), then the system of its restrictions $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{(m+1)l}(t))'$ is a solution to problems (4) - (7). And vice versa, if the system of vector functions $\tilde{x}[t] = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \ldots, \tilde{x}_{(m+1)l}(t))'$ is a solution to problems (4)-(7), then the function $\tilde{x}(t)$, defined by the equalities $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_r(t), t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1,(m+1)l}, \tilde{x}(T) = \lim_{t\to T-0} \tilde{x}_{(m+1)l}(t)$, will be the solution to the original problem. We introduce the notation $\lambda_r = x_r(t_{r-1})$ and make the substitution $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$ at each subinterval $[t_{r-1}, t_r)$. Then the problems (4)-(7) are reduced to an equivalent multipoint boundary value problem with parameters

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)[u_r(t) + \lambda_r] + f(t), \ t \in [t_{r-1}, t_r), u_r(t_{r-1}) = 0, \ r = \overline{1,(m+1)l}, \tag{8}$$

$$B_0\lambda_1 + C_0 \lim_{t\to T-0} u_{(m+1)l}(t) + C_0\lambda_{(m+1)l} = d, \tag{9}$$

$$B_i \lim_{t\to t_{il}-0} u_{il}(t) + B_i\lambda_{il} - C_i\lambda_{il+1} = p_i, \ i = \overline{1,m}. \tag{10}$$

$$\lambda_s + \lim_{t\to t_s-0} u_s(t) = \lambda_{s+1}, \ s = \{\overline{1,(m+1)l-1}\} \backslash \{il\}, \ i = \overline{1,m}. \tag{11}$$

If a pair $(\lambda, u[t])$ with

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{(m+1)l})' \in R^{n(m+1)l}, \ u[t] = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_{(m+1)l}(t))'$$

is a solution to problems (8)-(11), then the function system

$$x[t] = (\lambda_1 + u_1(t), \lambda_2 + u_2(t), \ldots, \lambda_{(m+1)l} + u_{(m+1)l}(t))'$$

will be a solution to problems (4)-(7).

Vice versa, if $\tilde{x}[t] = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \ldots, \tilde{x}_{(m+1)l}(t))'$ is a solution to problems (4)-(7), then $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$ with $\tilde{\lambda} = (\tilde{x}_1(0), \tilde{x}_2(t_1), \ldots, \tilde{x}_{(m+1)l}(T))'$,

$\tilde{u}[t] = (\tilde{x}_1(t) - \tilde{x}_1(0), \tilde{x}_2(t) - \tilde{x}_2(t_2), \ldots, \tilde{x}_{(m+1)l}(t) - \tilde{x}_{(m+1)l}(t_{(m+1)l-1}))'$ will be a solution to problem (8)-(11). However, problems (8)-(11) differ from (4)-(7) in that there appear the initial conditions at the points $t = t_{r-1}, r = \overline{1,(m+1)l}$, which allow us to determine $u_r(t), t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1,(m+1)l}$, from the Volterra integral equation of the second kind

$$u_r(t) = \int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau)[u_r(\tau) + \lambda_r]d\tau + \int_{t_{r-1}}^{t} f(\tau)d\tau, \ t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1,(m+1)l}. \tag{12}$$

Instead of substituting the corresponding right-hand side of (12) and repeating this process ν $(\nu = 1,2,\ldots)$ once, we obtain a representation of a function of the form

$$u_r(t) = D_{\nu,r}(t)\lambda_r + F_{\nu,r}(t) + G_{\nu,r}(u,t), \ t \in [t_{r-1}, t_r), \ r = \overline{1,(m+1)l}, \tag{13}$$

$$D_{,\nu,r}(t)=\sum_{j=0}^{\nu-1}\int_{t_{r-1}}^{t_r}A(\tau_1)\ldots\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}}A(\tau_{\nu-1})\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}A(\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1,$$

$$G_{\nu,r}(u,t)=\int_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_1)\ldots\int_{t_{r-1}}^{\tau_\nu}A(\tau_{\nu+1})u_r(\tau_{\nu+1})d\tau_{\nu+1}\ldots d\tau_1,$$

$$F_{\nu,rr}(t)=\int_{t_{r-1}}^{t_r}f(\tau_1)d\tau_1+\sum_{t_{r-1}}^{t}\int_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_1)\ldots\int_{t_{r-1}}^{\tau_{j-2}}A(\tau_{\nu-1})\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}f(\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1.$$

From (13) we find that

$$\lim_{t\to t_r-0}u_r(t)=D_{\nu,r}(t_r)\lambda_r+F_{\nu,r}(t_r)+G_{\nu,r}(u_r,t_r),\ r=\overline{1,(m+1)l}.$$

Substituting the corresponding right-hand parts (14) in conditions (9),(10), we get the system of equations for unknown parameters $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{(m+1)l}$:

$$Q_\nu(l)\lambda=-F_\nu(l)-G_\nu(u,l),\ \lambda\in R^{n(m+1)l}, \tag{15}$$

A solution of the multipoint boundary value problem with parameters (4) - (7) is found as the limit of the sequence of pairs $(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t])$, determined by the following algorithm:

Step 0. (a) Assuming that for some $l\in N,\ \nu\in N$, the matrix $Q_\nu(l):R^{n(m+1)l}\to R^{n(m+1)l}$ is invertible, the initial approximation of the parameter $\lambda\in R^{n(m+1)l}$, is found from $Q_\nu(l)\lambda^{(0)}=-F_\nu(l)$, $\lambda^{(0)}=-[Q_\nu(l)]^{-1}F_\nu(l)$;

(b) Using vector components $\lambda^{(0)}\in R^{n(m+1)l}$ and solving the Cauchy problem (8) with $\lambda_r=\lambda_r^{(0)}$ on the subintervals $[t_{r-1},t_r)$, we find functions $u_r^{(0)}(t)$, $r=\overline{1,(m+1)l}$.

Step 1. (a) Substituting found $u_r^{(0)}(t)$ to the right-hand side of (15), from equation $Q_\nu(l)\lambda=-F_\nu(l)-G_\nu(u^{(0)},l)$ we determine the first approximation of the parameter $\lambda^{(1)}$;

(b) Solving the Cauchy problem (8) on the subintervals $[t_{r-1},t_r)$, with $\lambda_r=\lambda_r^{(0)}$, we find functions $u^{(1)}(t)$, $r=\overline{1,(m+1)l}$. And so on.

Continuing the process, on Step k we get the pair system $(\lambda_r^{(k)},u_r^{(k)}(t))$, $k=0,1,2\ldots$, $r=\overline{1,(m+1)l}$.

The following theorem provide sufficient conditions for the feasibility and convergence of the proposed algorithm to a unique solution to the boundary value problem with impulsive effect (1) - (3).

Theorem 1. *Suppose that for some $l\in N$ and $\nu\in N$ the matrix $Q_\nu(l):R^{n(m+1)l}\to R^{n(m+1)l}$ is invertible and the following inequalities hold:*

$$\|[Q_\nu(l)]^{-1}\|\le\gamma_\nu(l), \tag{16}$$

$$q_\nu(l)=\gamma_\nu(l)\max\left[1,\max_{i=1,m}\frac{h_i}{l}\|B_i\|,\frac{h_{m+1}}{l}\|C_0\|\right]\times \tag{17}$$
$$\times\left\{\exp\left(\frac{\alpha h^0}{l}\right)^j-\sum_{j=0}^{\nu}\frac{1}{j!}\left(\frac{\alpha h^0}{l}\right)^j\right\}<1.$$

Then the boundary value problem with impulse effect (1)-((3) has a unique solution $x^*(t)$ and the following estimation is true:.

$$\|x^*\|=\max_{r=1,(m+1)l}\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|x^*(t)\|\le L_{1,\nu}(l)\max(\|d\|,\|f\|_1,\max_{i=1,m}\|p_i\|) \tag{18}$$

where $L_{1,\nu}(l)$ *does not depend on* $f(t)$, d, p_i *and is calculated through* B_i, C_i, $i=\overline{(0,m)}$, α, h^0, $\gamma_\nu(l)$, $q_\nu(l)$, ν, l.

The following statements establish that the conditions of Theorem 1 are not only sufficient but necessary for the unique solvability of problems (1) - (3).

Theorem 2. *The boundary value problem with impulse action (1) - (3) is uniquely solvable if and only if for any $l \in N$ there exists $\nu \in N$ such that the matrix $Q_\nu(l): R^{n(m+1)l} \to R^{n(m+1)l}$ is invertible and inequalities (16) and (17) of Theorem 1 are satisfied.*

Theorem 3. *The boundary value problem with impulse action (1) - (3) is uniquely solvable if and only if for any $\nu \in N$ there exists $l = l(\nu) > 0$, $l \in N$, such that the matrix $Q_\nu(l): R^{n(m+1)l} \to R^{n(m+1)l}$ is invertible and inequalities (16) and (17) of Theorem 1 are satisfied.*

The following statements establish the relationship between the constant of the correct solvability and an upper bound of the norm of the matrix $Q_\nu(l)$.

Theorem 4. *If the boundary value problem with impulsive action (1) - (3) is uniquely solvable with a constant K, then for any $\varepsilon > 0, \nu \in N$ there exists $l_1 = l_1(\varepsilon, \nu)$ such that $Q_\nu(l)$ is invertible for any $l \geq l_1(\varepsilon, \nu)$ and the following estimate is valid:*

$$\|[H^{-1}Q_\nu(l)]^{-1}\| \leq (1+\varepsilon)K$$

where

$$H = \frac{1}{l} diag\left(\underbrace{h_{m+1}l, h_1 l, \ldots, h_1 l}_{l}, \underbrace{h_1 l, h_2 l, \ldots, h_2 l}_{l}, \ldots, \underbrace{h_m l, h_{m+1} l, \ldots, h_{m+1} l}_{l}\right).$$

Theorem 5. *Let for some $\nu \in N$ there exists $l_0 = l_0(\nu)$ such that for all $l \geq l_0(\nu)$ the matrix $Q_\nu(l)$ is invertible and its inverse satisfies the inequality*

$$\|[H^{-1}Q_\nu]^{-1}\| \leq \gamma,$$

where γ is a constant independent of l. Then problems (1) - (3) are correctly solvable with the constant $K = \gamma$.

One of the main conditions for the feasibility of the algorithm and the unique solvability of the two-point boundary value problem with an impulse effect is the invertibility of the matrix $Q_\nu(l)$ for some ν, l. The block band structure of the matrix $Q_\nu(l)$ allows us to get the recurrence formulas that block-wise determine the elements of $[Q_\nu(l)]^{-1}$. Assuming that the matrices $C_i, i = \overline{(1,m)}$, are invertible, we establish the equivalence of the invertibility of $Q_\nu(l)$ to that of the $(n(m+1)l \times n(m+1)l)$ matrix $M_\nu(l)$ defined as

$$M_\nu(l) = B_0 + C_0 \prod_{s=(m+1)l}^{ml+1} [I + D_{\nu,s}(t_s)] \prod_{j=m}^{1} \left\{ C_j^{-1} B_j \prod_{s=jl}^{(j-1)l+1} [I + D_{\nu,s}(t_s)] \right\}$$

REFERENCES

1. A.M. Samoilenko and N. A. Perestyuk, Impulsive Differential Equations [in Russian], Vyshcha Shkola, Kiev (1987).
2. D. S. Dzhumabayev, USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics 29, 34–46 (1989).
3. A.B. Tleulesova. Periodic boundary value problem for a system of ordinary differential equations with impulse effects International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2016), AIP Conf.Proc.1759, 020061-1 – 020061-5;
4. A. M. Samoilenko, and N. I. Ronto, Numerical-Analytic Methods for the Investigation of the Solutions of Boundary-Value Problems, Naukova Dumka, Kiyv, 1986, p. 565.
5. E. Liz, and J. Nieto, Communications in applied analysis 2, 565 – 571 (1998).
6. D. S. Dzhumabaev and S. M. Temesheva, Computational mathematics and mathematical physics 47, 37–61 (2007).

Тлеулесова А.Б.
Импульстік әсері бар сызықты екінүктелі шеттік есептің бірмәндік шешілімдігі туралы

Аңдатпа: Импульстік әсері бар жай дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есеп қарастырылады. Ұсынылып отырған есептің бірмәндік шешілімдігінің қажетті және жеткілікті шарттары тағайындалған.

Түйінді сөздер: шеттік есеп, импульс, параметрлеу тәсілі, бірмәнді шешілімділік

Тлеулесова А.Б.
О корректной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи с импульсным воздействием

Аннотация. Рассматривается краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Установлены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: краевая задача, импульс, метод параметризации, корректная разрешимость

About the author:
Agila B. Tleulessova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, Gumilyov Eurasian National University.

УДК 517.956

Assanova A.T.[1,*], **Kadirbayeva Zh.M.**[1,2]

[1]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan.
[2]International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan.

ON ONE APPROACH TO SOLVE A NONLOCAL PROBLEM WITH PARAMETER FOR A SECOND ORDER PARTIAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF HYPERBOLIC TYPE

Abstract. *A linear nonlocal problem with a parameter for partial integro-differential equations of hyperbolic type is considered. This problem is investigated by the Dzhumabaev parameterization method. We offer an algorithm for solving nonlocal problems with parameter for partial integro-differential equations of hyperbolic type. First, the original problem is reduce to an equivalent problem consisting a family of boundary value problems for ordinary integro-differential equations with parameters and integral relations. Then, we reduced the family of boundary value problems for ordinary integro-differential equations with parameters to a family of special Cauchy problems for ordinary integro-differential equations with parameters in subdomains and functional relations. At fixed values of parameters the family of special Cauchy problems for ordinary integro-differential equations in subdomains has a unique solution. A system of linear functional equations with respect to parameters is compiled. We propose an algorithm for finding an approximate solution to the equivalent problem. This algorithm includes the approximate solution of the family of Cauchy problems for ordinary differential equations and solving the linear system of functional equations.*

Key words: *nonlocal problem with parameters, partial integro-differential equations of hyperbolic type, family of boundary value problems with parameter, ordinary integro-differential equations, Dzhumabaev parameterization method, algorithm.*

The problem of constructing effective mathematical models finds its solution in many areas of life sciences and technology. A modern approach in the theory of control and identification of parameters should be connected to the development of new constructive methods and modifications of known methods for solving nonlocal problems with parameter for partial integro-differential equations of hyperbolic type. The theory of nonlocal problems with parameters for partial integro-differential equations of hyperbolic type is developing intensively and is used in various fields of biomedicine, chemistry, biology, etc. [1-12]. In spite of this, the questions of establishing the coefficient criterions of a unique solvability and constructing the approximate algorithms for finding the solutions of nonlocal problems with parameter for the partial integro-differential equations of hyperbolic type still remain open. One of the constructive methods for investigating and solving the problems with parameters for the differential equations is the Dzhumabaev parameterization method [13]. The Dzhumabaev parameterization method was developed for investigating and solving the boundary value problems for the system of ordinary differential equations. On the basis of this method, coefficient criteria for the unique solvability of linear boundary value problems for the system of ordinary differential equations were obtained. Algorithms for finding the approximate solutions were also proposed and their convergence to the exact solution of the problem studied was established. Later, the parameterization method was developed for the two-point boundary value problems for the Fredholm integro-differential equations [14-25]. Necessary and sufficient conditions for the solvability and unique solvability are established, the algorithms for finding the approximate solutions of the problems considered are constructed. In [18], methods for solving the linear boundary value problems for the Fredholm integro-differential equation on the basis of new algorithms of the parameterization method are offered. In [21] these methods are used to solve a nonlocal problem for a system of loaded and integro-differential equations of hyperbolic type.

In the present paper we propose a new approach based on the Dzhumabaev parameterization method for solving a nonlocal problem with parameters for partial integro-differential equations of hyperbolic type. We offer an approximate method to solve a nonlocal problem with parameter for partial integro-differential equations of hyperbolic type.

On the domain $\Omega=[0,T]\times[0,\omega]$ consider the linear nonlocal problem with parameters for the second order partial integro-differential equations of hyperbolic type

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}=A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}+B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t}+C(t,x)u+\int_0^T K(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}dt+D(t,x)\mu(x)+f(t,x), \tag{1}$$

$$P(x)\frac{\partial u(0,x)}{\partial x}+S(x)\frac{\partial u(T,x)}{\partial x}=\varphi_1(x), \quad x\in[0,\omega], \tag{2}$$

$$u(t,0)=\psi(t), \quad t\in[0,T], \tag{3}$$

$$\frac{\partial u(\theta,x)}{\partial x}=\varphi_2(x), \quad x\in[0,\omega], \tag{4}$$

where $u(t,x)$ is an unknown function, $\mu(x)$ is an unknown functional parameter, the functions $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $K(t,x)$, $D(t,x)$, and $f(t,x)$ are continuous on Ω, the functions $P(x)$, $S(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ are continuous on $[0,\omega]$, and the function $\psi(t)$ is continuously differentiable on $[0,T]$.

Let $C(\Omega,R)$ ($C([0,\omega],R)$) denote the space of continuous functions $u:\Omega\to R$ ($\mu:[0,\omega]\to R$) with the norm $\|u\|_1=\max_{(t,x)\in\Omega}\|u(t,x)\|$ ($\|\mu\|_1=\max_{x\in[0,\omega]}\|\mu(x)\|$).

A solution to problems (1)-(4) is a pair $(u^*(t,x),\mu^*(x))$, with $u^*(t,x)\in C(\Omega,R)$, $\mu^*(x)\in C([0,\omega],R)$, where the function $u^*(t,x)$ has partial derivatives $\frac{\partial u^*(t,x)}{\partial x}\in C(\Omega,R)$, $\frac{\partial u^*(t,x)}{\partial t}\in C(\Omega,R)$, $\frac{\partial^2 u^*(t,x)}{\partial t\partial x}\in C(\Omega,R)$ and satisfies the partial integro-differential equation of hyperbolic type (1) with $\mu(x)=\mu^*(x)$ and boundary conditions (2), (3) and (4).

Introduce the new functions $v(t,x)=\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x}$, $w(t,x)=\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}$.

We reduce problems (1)-(4) to an equvalent problem

$$\frac{\partial v}{\partial t}=A(t,x)v+\int_0^T K(t,x)v(t,x)dt+D(t,x)\mu(x)+B(t,x)w(t,x)+C(t,x)u(t,x)+f(t,x), \tag{5}$$

$$P(x)v(0,x)+S(x)v(T,x)=\varphi_1(x), \quad x\in[0,\omega], \tag{6}$$

$$v(\theta,x)=\varphi_2(x), \quad x\in[0,\omega], \tag{7}$$

$$u(t,x)=\psi(t)+\int_0^x v(t,\xi)d\xi, \qquad w(t,x)=\dot{\psi}(t)+\int_0^x \frac{\partial v(t,\xi)}{\partial t}d\xi, \tag{8}$$

where condition (3) takes account into relations (8).

A solution to problems (5)-(8) is a quadruple $(v^*(t,x),\mu^*(x),u^*(t,x),w^*(t,x))$, with $v^*(t,x)\in C(\Omega,R)$, $\mu^*(x)\in C([0,\omega],R)$, $u^*(t,x)\in C(\Omega,R)$, $w^*(t,x)\in C(\Omega,R)$, where the function $v^*(t,x)$ has partial derivative $\dfrac{\partial v^*(t,x)}{\partial t}\in C(\Omega,R)$ and satisfies the integro-differential equation (5) for all $(t,x)\in\Omega$ with $\mu(x)=\mu^*(x)$, $u(t,x)=u^*(t,x)$, $w(t,x)=w^*(t,x)$ and boundary conditions (6) and (7), here the functions $u^*(t,x)$ and $w^*(t,x)$ are connected with functions $v^*(t,x)$ and $\dfrac{\partial v^*(t,x)}{\partial t}$ by integral relations (8).

Further, we apply the Dzhumabaev parameterizaion method.

Given the points: $t_0=0<t_1<t_2<\ldots<t_m=\theta<\ldots<t_{N-1}<t_N=T$, and let $\Delta_N(\theta,\omega)$ be the partition of domain Ω into N subdomains: $\Omega=\bigcup_{r=1}^{N}\Omega_r$, $\Omega_r=[t_{r-1},t_r)\times[0,\omega]$, $r=1,2,\ldots,N-1$, $\Omega_N=[t_{N-1},t_N]\times[0,\omega]$.

By $C(\Omega,\Delta_N(\theta,\omega),R^N)$ we denote the space of function systems $v([t],x)=(v_1(t,x),v_2(t,x),\ldots,v_N(t,x))$, where $v_r:\Omega_r\to R$ are continuous and have finite left-hand limits $\lim_{t\to t_r-0}v_r(t,x)$ for all $r=1,2,\ldots,N$, with the norm $\|v\|_2=\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in\Omega_r}\|v_r(t,x)\|$.

Denote by $v_r(t,x)$ the restriction of function $v(t,x)$ to the r-th domain Ω_r and reduce problems (1)-(4) to the equivalent family of multipoint problems with parameter for the ordinary integro-differential equations

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}=A(t,x)v_r+\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j}K(t,x)v_j(t,x)dt+D(t,x)\mu(x)+B(t,x)w(t,x)+C(t,x)u(t,x)+f(t,x), \tag{9}$$

$$r=1,2,\ldots,N,\ P(x)v_1(0,x)+S(x)v_N(T,x)=\varphi_1(x), \quad x\in[0,\omega], \tag{10}$$

$$v_{m+1}(\theta,x)=\varphi_2(x), \quad x\in[0,\omega], \tag{11}$$

$$\lim_{t\to t_p-0}v_p(t,x)=v_{p+1}(t_p,x), \qquad p=1,2,\ldots,N-1, \tag{12}$$

$$u(t,x)=\psi(t)+\int_0^x v_r(t,\xi)d\xi, \quad w(t,x)=\dot{\psi}(t)+\int_0^x\frac{\partial v_r(t,\xi)}{\partial t}d\xi, \quad (t,x)\in\Omega_r,\ r=1,2,\ldots,N, \tag{13}$$

where (12) are conditions for matching the solution at the interior points of partition $\Delta_N(\theta,\omega)$.

The solution of problems (9)-(13) is a quadruple $(v^*([t],x),\mu^*(x),u^*(t,x),w^*(t,x))$ with elements $v^*([t],x)=(v_1^*(t,x),v_2^*(t,x),\ldots,v_N^*(t,x))\in C(\Omega,\Delta_N(\theta,\omega),R^N)$, $\mu^*(x)\in C([0,\omega],R)$ $u^*(t,x)\in C(\Omega,R)$, $w^*(t,x)\in C(\Omega,R)$, where functions $v_r^*(t,x)$, $r=1,2,\ldots,N$, are continuously differentiable on Ω_r, which satisfies system of integro-differential equations (9) with $\mu(x)=\mu^*(x)$,

$u(t,x)=u^*(t,x)$, $w(t,x)=w^*(t,x)$, and boundary conditions (10) and (11) and continuity conditions (12), the functions $u^*(t,x)$ and $w^*(t,x)$ are connected with functions $v_r^*(t,x)$ and $\frac{\partial v_r^*(t,x)}{\partial t}$ by integral relations (13) for $(t,x)\in\Omega_r$, $r=1,2,...,N$.

We introduce additional parameters $\lambda_r(x)=v_r(t_{r-1},x)$, $r=1,2,...,N$, and $\lambda_{N+1}(x)=\mu(x)$. Making the substitution $\tilde v_r(t,x)=v_r(t,x)-\lambda_r(x)$, on every $r-$th domain Ω_r, $r=1,2,...,N$, we obtain the family of multipoint problems with parameters

$$\frac{\partial\tilde v_r}{\partial t}=A(t,x)\tilde v_r+A(t,x)\lambda_r(x)+\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j}K(t,x)[\tilde v_j(t,x)+\lambda_j(x)]dt+D(t,x)\lambda_{N+1}(x)+$$

$$+B(t,x)w(t,x)+C(t,x)u(t,x)+f(t,x),\quad (t,x)\in\Omega_r,\ r=1,2,...,N, \tag{14}$$

$$\tilde v_r(t_{r-1},x)=0,\qquad r=1,2,...,N, \tag{15}$$

$$P(x)\lambda_1(x)+S(x)\lambda_N(x)=\varphi_1(x)-S(x)\tilde v_N(T,x),\quad x\in[0,\omega], \tag{16}$$

$$\lambda_{m+1}(x)=\varphi_2(x),\quad x\in[0,\omega], \tag{17}$$

$$\lambda_p(x)-\lambda_{p+1}(x)=-\lim_{t\to t_p-0}\tilde v_p(t,x)\quad,\quad p=1,2,...,N-1, \tag{18}$$

$$u(t,x)=\psi(t)+\int_0^x[\tilde v_r(t,\xi)+\lambda_r(x)]d\xi,\qquad w(t,x)=\dot\psi(t)+\int_0^x\frac{\partial\tilde v_r(t,\xi)}{\partial t}d\xi,\quad (t,x)\in\Omega_r,\ r=1,2,...,N, \tag{19}$$

A quadruple $(\tilde v^*([t],x),\lambda^*(x),u^*(t,x),w^*(t,x))$ with elements $\lambda^*(x)=(\lambda_1^*(x),\lambda_2^*(x),\ldots,\lambda_{N+1}^*(x))$, $\lambda_r^*(x)\in C([0,\omega],R)$, $r=1,2,...,N+1$, $\tilde v^*([t],x)=(\tilde v_1^*(t,x),\tilde v_2^*(t,x),\ldots,\tilde v_N^*(t,x))\in C(\Omega,\Delta_N(\theta,\omega),R^N)$, $u^*(t,x)\in C(\Omega,R)$, $w^*(t,x)\in C(\Omega,R)$, is said to be a solution to problems (14)-(19) if the functions $\tilde v_r^*(t,x)$, $r=1,2,...,N$, are continuously differentiable on Ω_r and satisfy (14) with $\lambda_r(x)=\lambda_r^*(x)$, $r=1,2,...,N+1$, $u(t,x)=u^*(t,x)$, $w(t,x)=w^*(t,x)$, and initial conditions (15), boundary conditions (16) and (17) and continuity conditions (18), the functions $u^*(t,x)$ and $w^*(t,x)$ are connected with functions $\tilde v_r^*(t,x)$ and $\frac{\partial\tilde v_r^*(t,x)}{\partial t}$ by integral relations (19) for $(t,x)\in\Omega_r$, $r=1,2,...,N$.

At fixed $\lambda_r(x)$, $u(t,x)$, $w(t,x)$ problems (14) and (15) are a family of special Cauchy problems for integro-differential equations, where $r=1,2,...,N+1$. The variable x changes on $[0,\omega]$ and plays role of the parameter of the family.

For fixed $x\in[0,\omega]$ and $\lambda_r(x)$, $u(t,x)$, $w(t,x)$, we have a special Cauchy problem for integro-differential equations. This problem is studied in [14-17]. Conditions of unique solvability are established in the terms of initial data.

Algorithm. The unknown function $\tilde v([t],x)$ will be determined from family of special Cauchy problems for integro-differential equations (14) and (15). The unknown parameters $\lambda_r(x)$, $r=1,2,...,N+1$ will be found from functional equations (16)-(18). The unknown functions $u(t,x)$ and $w(t,x)$ will be found from integral relations (19).

If we know the functions $\lambda_r(x)$, $r=1,2,...,N+1$, $u(t,x)$, $w(t,x)$, then from family of special Cauchy problem for integro-differential equations (14) and (15) we find the function $\tilde v([t],x)$. Conversely, if we know the function $v([t],x)$, then from functional equations (16)-(18) we find the functions $\lambda_r(x)$, $r=1,2,...,N+1$. Further, using founded functions, from integral relations we determine $u(t,x)$ and $w(t,x)$.

Since the functions $v([t],x)$, $\lambda_r(x)$, $u(t,x)$ and $w(t,x)$ are unknown, for finding a solution to problems (14)--(19) we use an iterative method. The solution to problems (14)--(19) is a quadruple of functions $(\tilde{v}^*([t],x),\lambda^*(x),u^*(t,x),w^*(t,x))$ which we define as the limit of the sequence of quadruples $(\tilde{v}^{(k)}([t],x),\lambda^{(k)}(x),u^{(k)}(t,x),w^{(k)}(t,x))$, $k=0,1,2,...$ according to the following algorithm:

Step 0. 1) Setting $\tilde{v}_s(t,x)=0$, $(t,x)\in\Omega_s$, $s=1,2,...,N$, in the right-hand part of the system of functional equations (16)-(19), we find the initial approximation $\lambda_r^{(0)}(x)$ for all $x\in[0,\omega]$, $r=1,2,...,N+1$;

2) In the right-hand part of the system, setting $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(0)}(x)$, $r=1,2,...,N+1$, $u(t,x)=\psi(t)$, $w(t,x)=\dot{\psi}(t)$, from the family of special Cauchy problem for integro-differential equations we find the initial approximations $\tilde{v}_s^{(0)}(t,x)$ for $(t,x)\in\Omega_s$, $s=1,2,...,N$;

3) From integral relations (19) under $v_s(t,x)=v_s^{(0)}(t,x)$, $(t,x)\in\Omega_s$, $s=1,2,...,N$, $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(0)}(x)$, $r=1,2,...,N$, we find the function $u^{(0)}(t,x)$ and $w^{(0)}(t,x)$ for all $(t,x)\in\Omega$.

Step 1. 1) Suppose in the right-hand part of the system of functional equations (16)-(19) $\tilde{v}_s(t,x)=\tilde{v}_s^{(0)}(t,x)$, $(t,x)\in\Omega_r$, $s=1,2,...,N$, from system (16)--(19) we find the first approximation $\lambda_r^{(1)}(x)$ for all $x\in[0,\omega]$, $r=1,2,...,N+1$;

2) Suppose in the right-hand part of the system $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(1)}(x)$, $r=1,2,...,N+1$, $u(t,x)=u^{(0)}(t,x)$, $w(t,x)=w^{(0)}(t,x)$, from the family of special Cauchy problems for integro-differential equations we find the first approximations $\tilde{v}_s^{(1)}(t,x)$ for $(t,x)\in\Omega_s$, $s=1,2,...,N$;

3) From integral relations (19) under $v_s(t,x)=v_s^{(1)}(t,x)$, $s=1,2,...,N$, $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(1)}(x)$, $r=1,2,...,N$, we find the function $u^{(1)}(t,x)$ and $w^{(1)}(t,x)$ for all $(t,x)\in\Omega$.

And so on.

Step k. 1) Suppose in the right-hand part of the system of functional equations (16)-(19) $\tilde{v}_s(t,x)=\tilde{v}_s^{(k-1)}(t,x)$, $(t,x)\in\Omega_r$, $s=1,2,...,N$, from systems (16)--(19) we find the kth approximation $\lambda_r^{(k)}(x)$ for all $x\in[0,\omega]$, $r=1,2,...,N+1$;

2) Suppose in the right-hand part of the system $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(k)}(x)$, $r=1,2,...,N+1$, $u(t,x)=u^{(k-1)}(t,x)$, $w(t,x)=w^{(k-1)}(t,x)$, from the family of special Cauchy problem for integro-differential equations we find the kth approximations $\tilde{v}_s^{(k)}(t,x)$ for $(t,x)\in\Omega_s$, $s=1,2,...,N$;

3) From integral relations (19) under $v_s(t,x)=v_s^{(k)}(t,x)$, $s=1,2,...,N$, $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(k)}(x)$, $r=1,2,...,N$, we find the function $u^{(k)}(t,x)$ and $w^{(k)}(t,x)$ for all $(t,x)\in\Omega$.

$k=1,2,3,...$.

Conditions of feasibility and convergence of the constructed algorithm and the conditions of the existence of a unique solution to problems (14)-(19) are established.

For obtaining conditions of the unique solvability to original problems (1)-(4) we use results obtained in [26-31].

***Funding**: The work is supported by the grants (№№ AP05132486, AP05131220, AP05132455) of Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (2018-2020).*

REFERENCES

1. Douglas J. and Jones B. Numerical methods for integro-differential equations of parabolic and hyperbolic types // Numerische Mathematik. 1962. Vol. 4. pp. 96–102.

2. Yanik E. and Fairweather G. Finite element methods for parabolic and hyperbolic partial integro-differential equations // Nonlinear Analysis. 1988. Vol. 12. pp. 785–809.
3. Pani A., Thomée V., and Wahlbin L. Numerical methods for hyperbolic and parabolic integro-differential equations // Journal of Integral Equations and Applications. 1992. Vol. 4. pp. 533–584.
4. Vasiliev F.P. Optimization methods. Faktorial Press, Moscow, 2002 (in Russ.).
5. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems, VSP, Utrecht, Boston, 2004.
6. Nakhushev A.M. Problems with shift for a partial differential equations, Nauka: Moskow, 2006.
7. Wang D. and Ruuth S. Variable step-size implicit-explicit linear multistep methods for time-dependent partial differential equations // Journal of Computational Mathematics. 2008. Vol. 26. pp. 838–855.
8. Dezern D.H., Adeyeye J.O., Pandit S.G. On nonlinear integro-differential equations of hyperbolic type // Nonlinear Analysis. 2009. Vol. 71. pp. 1802-1806.
9. Assanova A.T. A periodic boundary value problem for systems of partial integro-differential equations // News of the NAS RK. Ser. Phys.-Mathem. 2010. No 1. pp. 5-10.
10. Assanova A.T. A periodic boundary value problem for systems of integro-differential equations hyperbolic type // Vestnik al-Farabi Kazakh NU. Ser. Mathem., mech., inf. 2010. No 1(64). pp. 46-51.
11. Wazwaz A.-M., Linear and Nonlinear Integral Equations: Methods and Applications. Higher Equacation Press, Beijing and Springer-Verlag: Berlin Heidelberg. 2011.
12. Loreti P., Sforza D. Control problems for weakly coupled systems with memory // Journal of Differential Equations. 2014. Vol. 257. pp. 1879-1938.
13. Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1989. Vol. 29. No 1. pp. 34-46.
14. Dzhumabaev D.S. A method for solving the linear boundary value problem for an integro-differential equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2010. Vol. 50. No 7. pp. 1150-1161.
15. Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the well-posedness of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations // Differential equations. 2010. Vol. 46. No 4. pp.553-567.
16. Dzhumabaev D.S. An algorithm for solving a linear two-point boundary value problem for an integrodifferential equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2013. Vol. 53. No 6. pp. 736-758.
17. Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the unique solvability of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations // Differential Equations. 2013. Vol. 49. No 9. pp.1087-1102.
18. Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2016. Vol. 294. P. 342-357.
19. Dzhumabaev D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2018. Vol. 327. pp. 79-108.
20. Dzhumabaev D.S. Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2018. Vol. 41. No 4. pp. 1439-1462.
21. Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problem for a system of loaded hyperbolic equations and an algorithm for finding its solution // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2018. Vol. 461. No 1. pp. 817-836.

22. Dzhumabaev D.S. New general solutions of ordinary differential equations and the methods for the solution of boundary-value problems // Ukrainian Mathematical Journal. 2019. Vol. 71. No 7. pp. 1006-1031.
23. Dzhumabaev D.S., Mynbayeva S.T. New general solution to a nonlinear Fredholm integro-differential equation // Eurasian Mathematical Journal. 2019. Vol. 10. No 4. pp. 24-33.
24. Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A., Mynbayeva S.T. A method of solving a nonlinear boundary value problem with a parameter for a loaded differential equation // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2020. Vol. 43. No 2. pp. 1788-1802.
25. Dzhumabaev D.S., Mynbayeva S.T. A method of solving a nonlinear boundary value problem for the Fredholm integro-differential equation // Journal of Integral Equations and Applications. 2020. Vol. 32. No 2. pp. 317-337.
26. Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Unique solvability of the boundary value problem for systems of hyperbolic equations with data on the characteristics // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2002. Vol.42. No 11. pp. 1609-1621.
27. Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Unique solvability of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations // Differential Equations. 2003. Vol.39. No 10. pp.1414-1427.
28. Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Correct solvability of a nonlocal boundary value problem for systems of hyperbolic equations // Doklady Mathematics. 2003. Vol. 68. No 1. pp.46-49.
29. Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posed solvability of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations // Differential Equations. 2005. Vol. 41. No 3. pp.352-363.
30. Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2013. Vol. 402. No 2. pp.167–178.
31. Assanova A.T., Iskakova N.B., Orumbayeva N.T. On the well-posedness of periodic problems for the system of hyperbolic equations with finite time delay // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2020. Vol. 43. No. 2. pp. 881-902.

Асанова А.Т., Кадирбаева Ж.М.

Екінші ретті гиперболалық тектес дербес туындылы интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін параметрі бар бейлокал есепті шешуге арналған бір тәсіл туралы

Аңдатпа: Екінші ретті гиперболалық тектес дербес туындылы интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін параметрі бар сызықты бейлокал есеп қарастырылады. Осы есеп Жұмабаевтың параметрлеу әдісімен зерттеледі. Біз гиперболалық тектес дербес туындылы интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін параметрі бар сызықты бейлокал есепті шешудің алгоритмін ұсынамыз. Біріншіден, бұл есеп параметрлері бар жай интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептер әулеті мен интегралдық қатынастардан тұратын пара-пар есепке келтіріледі. Содан кейін, параметрлері бар жай интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептер әулеті ішкі облыстардағы параметрлері бар жай интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін арнайы Коши есептері әулетіне және функционалдық қатынастарға келтіріледі. Параметрлердің бекітілген мәндерінде ішкі облыстардағы параметрлері бар жай интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін арнайы Коши есептері әулетінің жалғыз шешімі бар болады. Параметрлерге қатысты сызықты функционалдық теңдеулер жүйесі құрылады. Пара-пар есептің жуық шешімін табудың алгоритмі беріледі. Бұл алгоритм жай интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін арнайы Коши есептері әулетін жуықтап шешуді және сызықты функционалдық теңдеулер жүйесін шешуді қамтиды.

Түйінді сөздер: параметрі бар бейлокал есеп, гиперболалық тектес дербес туындылы интегралдық-дифференциалдық теңдеулер, параметрі бар шеттік есептер әулеті, жай интегралдық-дифференциалдық теңдеулер, Жұмабаевтың параметрлеу әдісі, алгоритм

Асанова А.Т., Кадирбаева Ж.М.

Об одном подходе к решению нелокальной задачи с параметром для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа второго порядка

Аннотация. Рассматривается линейная нелокальная задача с параметром для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа. Эта задача исследуется методом параметризации Джумабаева. Предлагается алгоритм решения нелокальной задачи с параметром для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа. Во-первых, исходная задача сводится к эквивалентной задаче, состоящей из семейства краевых задач для обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений и интегральных соотношений. Затем, семейства краевых задач для обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений сводятся к семейству специальных задач Коши для обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений с параметрами на подобластях и функциональным соотношениям. При фиксированных значениях параметров семейство специальных задач Коши для обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений имеет единственное решение. Составляется линейная система функциональных уравнений относительно параметров. Предлагается алгоритм нахождения приближенных решений эквивалентной задачи.

Данный алгоритм включает приближенное решение семейства специальных задач Коши для обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений и решение линейной системы функциональных уравнений.

Ключевые слова: нелокальная задача с параметром, интегро-дифференциальные уравнения в частных производных гиперболического типа, семейства краевых задач с параметром, обыкновенные интегро-дифференциальные уравнения, метод параметризации Джумабаева, алгоритм.

About authors:

Anar T. Assanova, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, professor, Differential Equations Department, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling.

Zhazira M. Kadirbayeva, cand. of ph.-math. sci., assistant-professor, Mathematical and Computational modeling Department, International Information Technology University.

Сведения об авторах:

Асанова Анар Турмаганбетовна, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики и математического моделирования, Отдел дифференциальных уравнений.

Кадирбаева Жазира Муратбековна, к.ф.-м.н., ассистент-профессор кафедры математического и компьютерного моделирования Международного университета информационных технологий.

УДК 004.85

Kabdrakhova S.S.
Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

PREDICTIVE MODELING OF FUTURE FLOODS IN THE ALMATY REGION USING MACHINE LEARNING METHODS

The article is dedicated to my supervisor, a very kind, good person and scientist, d. phys.-math.sci., professor D.S. Dzhumabaev

Abstract. *The development of modern science and technology allows us to realize many opportunities that are not yet available. For example, the study of various natural phenomena and their hidden dangers, as well as forecasting, can prevent or intensify preventive measures. The impact, the region and frequency of their occurrence affect our lives to an unprecedented extent. It is very difficult to prevent these events in the short term, but a risk prevention plan can reduce the negative consequences of an accident. The present study is focused on the evaluation of flood potential within Malaya Almatinka river basin in Almaty using four prediction models RandomForest, LinearRegression, DecisionTree and XGBoost.*

Key words: *prediction of flood, machine learning, RandomForestRegressor, LinearRegressionRegressor, DecisionTreeRegressor and XGBoostRegressor.*

1. Introduction

Floods belong to one of the most frequent as well as devastating natural disasters worldwide [1]. Due to ongoing climate change and increasing anthropic pressure on the landscape [2], the frequency and magnitude of future flood situations is expected to rise while the development of the population's resilience against floods is questionable, especially, in developing countries [3-5].

A lot of scientific papers are devoted to topics such as predicting flooding, for determining an area as having very low to very high flood potential, through approaches that use hydrological-hydraulic models for flood modeling. And there are also works dedicated to the study of flood susceptibility through geospatial technologies [6-15] and a lot of references to these are given in the work [16]. All flood studies were conducted using data from different countries of the world, but not from Kazakhstan.

In the summer of 1921, the Malaya Almatinka river was transported to the center of the villages. From the large stones destroyed along with the mudslide, Almaty turned into rubble and sank into the mud. More than 500 people were killed in the accident. "This was a great loss of life for a city built from the logs of single-story houses with a population of only thirty thousand people. The city was severely affected by this flood, all the streets are filled with water. In six hours, flood water delivered 7 million cubic meters of water and 3,250,000 cubic meters of rock, sand and mud to the city. In [17, p. 146-152] there is a description of the flood. The paper presents methods for the calculation of flooding zones in a territory with the use of a digital elevation model on the basis of successive pools [18,19].

In this paper we used the Malaya Almaty river basin in Almaty to study the prediction of flooding using four prediction models RandomForest, LinearRegression, DecisionTree and XGBoost. 10 flood predictors, 8 flood locations, and 8 non-flood locations were used. As input, the model used the percentage of 70% of the places where flooding and flooding occurred. Of the input data, 70% were used as a training sample, and 30% were used as a test sample. The highest accuracy was obtained by the RandomForestRegressor model in terms of testing (0.853) samples. Checking the results performed by the R2 method emphasizes that the RandomForestRegressor model gave the most accurate results.

2. Study area

Malaya Almatinka is a river in Almaty, a right tributary of the Kaskelen river. It originates from the Tuyuksu glaciers of the Zailiysky Alatau range. With a length of 125 km, it has a catchment area of 710 km^2. The main tributaries are Sarysay (Yellow Log), Kuigensay (Gorelnik), Kimasar, Zharbulak (Kazachka), Battery (Bedelbay), Butakovka, Karasu-Turksib, Esentai, Karasu and Terenkara.

Physical and geographical characteristics. The Malaya Almatinka is located in three different landscape zones: mountain, foothill and plain. The riverbed in the mountain zone is moderately meandering, composed of boulder-pebble deposits, width 3-13 m; river depth from 0.15 to 0.5 m; the average long-term annual flow of the river is 0.32 m^3/s, at the meteorological station mynzhilki, 2.3 m^3/s.

All the catastrophic floods in the twentieth century, which almost covered Almaty, were in the month of July in 1921, 1956, 1963, 1973 and 1977. In particular, these events happened on July 8th, 7th, 15th and the August 3rd [20]. In October 1966, an anti-settlement dam was built in the Medeu tract by a directional explosion in the river basin. At the exit from the Malaya Almaty gorge the river divides into 3 branches: Esentai (Vesnovka a), zharbulak (Cossack) and the Malaya Almatinka. In the city of Almaty, the Malaya Almatinka flows through the Eastern part of the city, and its banks are concreted. The river basin has 46 lakes, ponds and reservoirs with a total surface area of 2.5 km^2.

3. Data

Given the fact that the main purpose of this study is to predict future flooding, the data used in this case were taken from different sources. In the present case, the historical flood events were collected from the books and web sites [21-24]. 10 factors affecting flooding were taken such as maximum and minimum temperature, date, rainfall, slope, land use, elevation, and region and target.

Data sets consist of 1100 pieces of data. Data were taken for Big Almaty lake, Chimbulak, Kamenskoye plateau, Medeo, Alamty city, the district Airport, Issyk city, Kapchagai city etc. For the 10 factors listed above, data is collected from 1921 to 2020 for 8 locations. The flood conditioning factors are briefly described below.

Slope angle directly influences the velocity of surface runoff and water accumulation potential and, therefore, is considered one of the main factors which contributes to flood phenomena genesis. In the case of the present research, the slope angle values, range from 0^0 to 18^0. Precipitation (rainfall) is an — atmospheric phenomena associated with the presence of water in the atmosphere in a liquid or solid state, falling from clouds or deposited from the air on the Earth's surface and any objects. Precipitation is measured by the thickness of the fallen water layer in millimeters. On average, the globe receives about 1000 mm of precipitation per year, and in deserts and high latitudes, there is less than 250 mm per year. In this study, precipitation values vary from 0 to 374.

Land use is the characterization of land based on what can be built on it and what the land can be used for. It takes only 3 forms in the context of the study: mountainous, urban, and rural.

Elevation (Elevation Height) is the height above sea level or absolute height. This is the difference between a point on land and the height of the sea. It is usually calculated based on average sea level, the part of a particular area that vertically exceeds above sea level. The starting point of elevation is called the zero point of elevation or zero point of level, which is the average surface of the sea on a particular coast. This is calculated based on long-term records of the local wave station by getting the average state of the sea surface. The elevation is an important flood predictor due to the fact that it differentiates the areas located at high altitude, where phenomena are less likely than in areas located at low altitudes, which are more exposed to the flood phenomena due to the direction of water runoff from high altitudes to low altitudes [25]. We have 8 regions for research: mountain, rural and urban, and each of them has a corresponding Elevation (Elevation Height). Attribute targets consist of the two values 0 and 1, where 0 means ‘no flood’ and 1 means ‘flood present’.

All these factors are included for different times starting from 1921 to 2020 (including the month of March), but not all years and months are taken into account. The resulting dataset consists of 1100 rows and 10 attributes.

4. Methods used for predicting flooding

For the study, several machine learning algorithms were built, four of which were selected, which gave good results. The dataset was split into a training set and a test set. The model was built on 70% of the data, and checked on 30%, and to implement the algorithms we used the methods of the sklearn library on Python. We designated all of the attribute values as X, except Target, Y, which is a vector consisting of the value of the Target in the data set. Below is a diagram of the implementation of the prediction models (Fig.1).

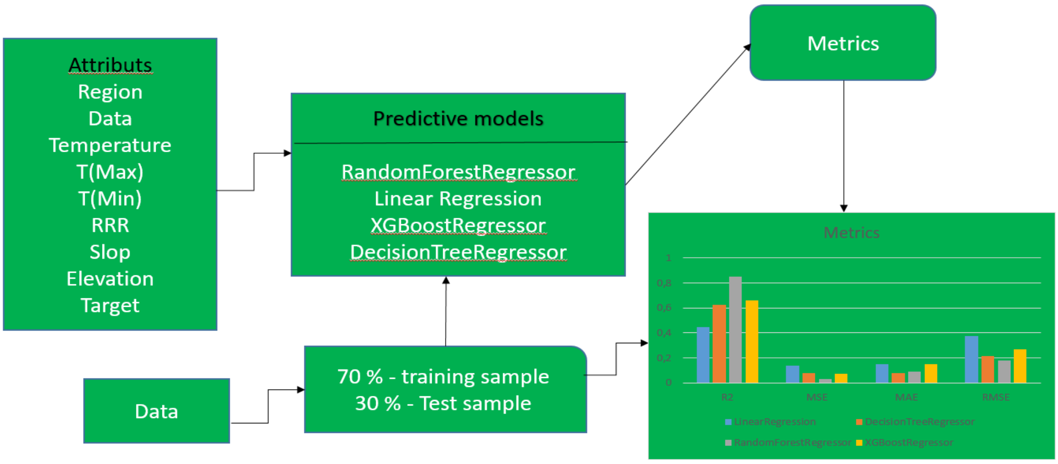


Figure-1. The scheme of prediction models

4.1 Linear Regression

The algorithms for regression are one of the types of control algorithms. An algorithm is used for building a model using data from a test suite, and then computed using test data from this model. In linear regression the target value is expected to be a linear combination of the features. In mathematical notation, if $\hat{y}(w,x) = w_0 + w_1x_1 + \ldots + w_px_p$

we designate the vector $w = (w_1, w_2, \ldots, w_p)$ as coef_ and w_0 as intercept_.

fits a linearregression model with coefficients $w = (w_1, w_2, \ldots, w_p)$ to minimize the residual sum of squares between the observed targets in the dataset, and the targets predicted by the linear approximation. Mathematically it solves a problem of the form:

$$\min_w \|xw - y\|_2^2 \tag{1}$$

LinearRegression will take in its fit method arrays X and y and will store the coefficients w of the linear model in its coef_ member. X is the matrix which consists of all attribute values, except Target, Y, which is Target for 70% of them for training and 30% for testing.

4.2 Decision Tree Regression

Regression Tree is a simple but powerful tool used to build prediction models from a large set of data, once it identifies which auxiliary variables are able to explain the variability of the response variable. The models are obtained by recursive partitioning of all the data concentrated in the root node (according to the most significant auxiliary variable) and fitting a simple prediction model within each partition [26]. According to [27], regression trees can fit almost every kind of traditional statistical model, including least squares, quantile, logistic, Poisson and proportional hazard models, as well as models for longitudinal and multiresponse data. The quality criterion in a desition tree regressor is $D = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}(y_i - \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l} y_i)$, where l is the number of objects in the sheet and y_i is the values of the target attribute. We minimize the variance around the average, and we look for features that break down the sample so that the values of the target feature in each sheet are approximately equal.

4.3 XGboost Regression

Through boosting - a training sample at each iteration is determined based on classification errors at previous iterations. The process of XGBoost involves assembling a base model for the preexisting model, for example, training an initial tree, constructing a second tree combined with the initial tree, and repeating the second step until the expected number of trees is reached.

The idea of gradient boosting is to train each subsequent algorithm on a discrepancy with real answers, to move towards reducing empirical risk. Let it be $h(x,\theta)$ - based algorithms.

$$\alpha_R(x) = \sum_{i=1}^{R} \beta_i h(x,\theta)$$

$$Q = \sum_{i=1}^{N} L(\alpha, y_i)$$

Boosting step for $r = \overline{1,R}$

$$\nabla Q = \left[\frac{\partial L(\alpha_{r-1}, y_i)}{\partial \alpha_{r-1}} (x_i) \right]_{i=1}^{N}$$

$$\theta_r = learn(X, \nabla Q)$$

$$\beta_r = \arg\min_{\beta} \sum_{i=1}^{N} \left(L(\alpha_{r-1}(x_i) + \beta \cdot h(x_i, \theta_r)), y_i \right)$$

$$\alpha_r = \alpha_{r-1}(x) + \beta_r \cdot h(x, \theta_r),$$

where $\theta -$ is learning rate. In the initial step learning rate was equal to 0.1 and $\beta_0 = 0$ was chosen by default, and $L -$is loss function, which depends on the type of problem being solved. It must be differentiable, and in our case the difference is squared between observed and predicted data, such as (1).

4.4 Random Forest Regression

Random forest is a bagging technique and not a boosting technique. The trees in random forests are run in parallel. There is no interaction between these trees while building the trees.

Random Forest is a set of decision trees. In the regression problem, their responses are averaged; in the classification problem, the decision is made by majority vote. All trees are built independently according to the following scheme:

- a sub-sample of the training sample is selected and a tree is built based on it (each tree has its own sub — sample).
- to build each split in the tree, view the max_features of random features (each new split has its own random features).
- choosing the best features and splitting it. The tree is usually built before the selection is exhausted, but modern implementations have parameters that limit the height of the tree, the number of objects in the leaves, and the number of objects in the subsample at which splitting is performed.

Data for training and testing is taken as indicated above. The best random forest regression parameters are selected using the methods of the sklearn library. Below is a model with parameters in our case:

```
RandomForestRegressor(bootstrap=True, criterion='mse', max_depth=None,
                      max_features='auto', max_leaf_nodes=None,
                      min_impurity_decrease=0.0, min_impurity_split=None,
                      min_samples_leaf=1, min_samples_split=2,
                      min_weight_fraction_leaf=0.0, n_estimators=100,
                      n_jobs=None, oob_score=False, random_state=42, verbose=0,
                      warm_start=False)
```

5. Results

The results validation was made using the testing dataset, and prediction data with the help of the training dataset. Regarding the Success Rate, the Random Forest Regression was the most performant model with the R^2 equal to 0,853, MSE equal to 0,032, MAE is equal to 0,032 and RMSE equal to 0,179, followed by the XGBoost regressor. All the results of metrics are shown in Fig. 2 and Fig.3.

Metrics for evaluating model results.

MAE (Mean absolute error): $MAE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\alpha(x_i) - y_i\right|$,

RMSE (Root mean squared error): $RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha(x_i) - y_i\right)^2}$,

MSE (Mean squared error): $MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha(x_i) - y_i\right)^2$,

R^2 (Coefficient of determination): $R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha(x_i) - y_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{N}\left(\overline{y} - y_i\right)^2}$,

often called R^2, represents the predictive power of the model as a value between 0 and 1. Zero means that the model is random (i.e. it does not explain anything); 1 means that there is a perfect fit.

Where $\alpha(x_i)$ - based algorithms, $y_{predict}(x_i) = \alpha(x_i) + \xi_i$, ξ_i is $N(0, \sigma_i)$ - normal distribution, σ is root of the variance, y_i observations, $\overline{y}$ is the observation's overall mean.

Figure 2. Metrics of models used by histogram

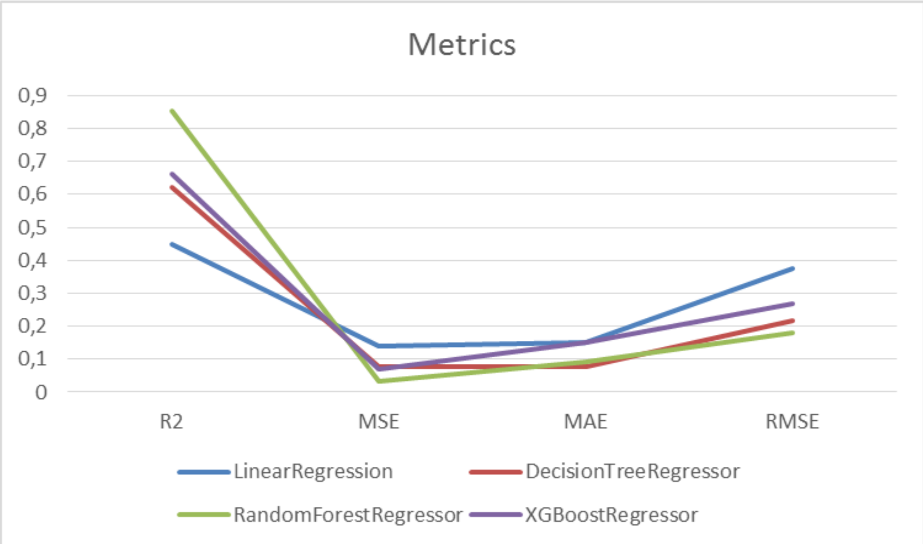


Figure 3. Metrics of models used by line

While minimizing errors and finding weights with fewer errors, we can also use a lot of methods. When we find weights so that there are minimal errors, we will use the gradient descent method, and we can also take derivatives equal to zero and obtain a system of equations for weights. To solve such systems, we can use different methods, one of which is given [28] for the general case.

6. Discussion

The Almaty region is one of the regions affected by mudflows. According to historical data, there were several large floods precisely along the Malaya Almatinka River. We are talking about mountain glaciers. Therefore, temperature and rainfall in the mountains affect the presence of floods. Below, in Fig.4, you see that one of the most important variables for the incidence of existing flood is the minimum temperature, followed by RRR meaning rainfall. This can be explained by the fact that when there are low temperatures after rain, it will snow, especially in the mountains. After a low temperature, according to statistical studies of the temperature in the districts of Almaty, there is always a high temperature, which affects the appearance of floods.

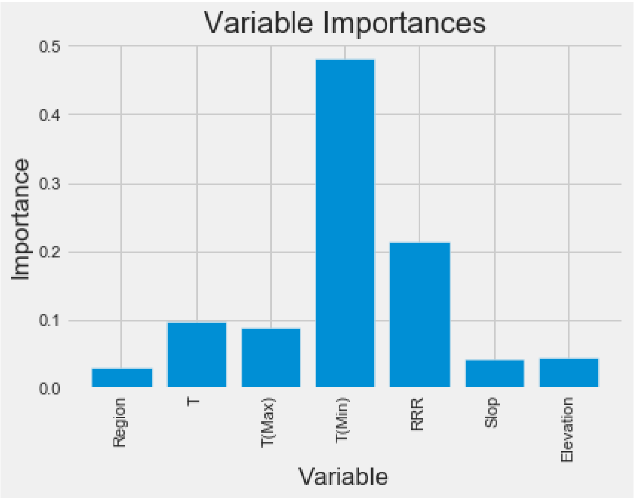


Figure 4. Feature importances

7. Conclusion

In the present study, the capability of four models was tested in terms of flood susceptibility prediction. This study comes in the context of the urgent measures, that should be taken to reduce the negative effects of floods. It should be remarked that in order to train the models and in the same time to evaluate their performance, the initially established training dataset was also divided into a sample used to train the models (70%) and another sample used to test the model performance (30%). To achieve good results, some model parameters were optimized using the 15-folds cross-validation procedure.

Thus, with the highest performance, the model built using the random forest algorithm gave the best result. The prediction using the model gave a positive result, that is, the forecast for floods in Almaty and Almaty region during the summer periods of 2020 and 2021 along the Malaya Almatinka river, will not occur with a probability of 83%.

At the moment, prediction using machine learning methods in Almaty has not been investigated. This work will be investigated in the future, supplemented with different datasets, such as satellite images, and so on.

REFERENCES

1. Shen, G., Hwang, S.N., 2019. Spatial–Temporal snapshots of global natural disaster impacts Revealed from EM-DAT for 1900-2015. Geomatics, Nat. Hazards Risk 10, 912–934.

2. Pravalie, R., Bandoc, G., Patriche, C., Sternberg, T., 2019. Recent changes in global drylands: Evidences from two major aridity databases. CATENA 178, 209–231. https://doi.org/10.1016/j.catena.2019.03.016.
3. Arnell, N.W., Gosling, S.N., 2016. The impacts of climate change on river flood risk at the global scale. Climatic Change 134, 387–401.
4. Hirabayashi, Y., Mahendran, R., Koirala, S., Konoshima, L., Yamazaki, D., Watanabe, S., Kim, H., Kanae, S., 2013. Global flood risk under climate change. Nat. Clim. Change 3, 816.
5. Pravalie, R., Bandoc, G., Patriche, C., Tomescu, M., 2017. Spatio-temporal trends of mean air temperature during 1961–2009 and impacts on crop (maize) yields in the most important agricultural region of Romania. Stoch Environ Res Risk Assess 31(8), 1923–1939. https://doi.org/10.1007/s00477-016-1278-7.
6. Costache, R., 2019a. Flood susceptibility assessment by using bivariate statistics and machine learning models-A useful tool for flood risk management. Water Resour. Manag. 33, 3239–3256.
7. Costache, R., 2019b. Flash-Flood Potential assessment in the upper and middle sector of Prahova river catchment (Romania). A comparative approach between four hybrid models. Sci. Total Environ. 659, 1115–1134.
8. Costache, R., 2019c. Flash-flood Potential Index mapping using weights of evidence, decision Trees models and their novel hybrid integration. Stoch. Environ. Res. Risk Assess. 33, 1375–1402.
9. Tien Bui, D., Khosravi, K., Shahabi, H., Daggupati, P., Adamowski, J.F., Melesse, A.M., Thai Pham, B., Pourghasemi, H.R., Mahmoudi, M., Bahrami, S., 2019. Flood spatial modeling in northern Iran using remote sensing and gis: a comparison between evidential belief functions and its ensemble with a multivariate logistic regression model. Rem. Sens. 11, 1589
10. Nardi, F., Vivoni, E.R., Grimaldi, S., 2006. Investigating a floodplain scaling relation using a hydrogeomorphic delineation method. Water Resour. Res. 42.
11. Degiorgis, M., Gnecco, G., Gorni, S., Roth, G., Sanguineti, M., Taramasso, A.C., 2012. Classifiers for the detection of flood-prone areas using remote sensed elevation data. J. Hydrol. 470, 302–315.
12. Gnecco, G., Morisi, R., Roth, G., Sanguineti, M., Taramasso, A.C., 2017. Supervised and semi-supervised classifiers for the detection of flood-prone areas. Soft Comput 21, 3673–3685.
13. Chen W, Shirzadi A, Shahabi H, Ahmad BB, Zhang S, Hong H, Zhang N, 2017 A novel hybrid artificial intelligence approach based on the rotation forest ensemble and naïve Bayes tree classifiers for a landslide susceptibility assessment in Langao County, China. Geomat Nat Hazards Risk 8(2):1955–1977
14. Dou J, Yamagishi H, Zhu Z, Yunus AP, Chen CW (2018) TXT-tool 1.081-6.1 A comparative study of the binary logistic regression (BLR) and artificial neural network (ANN) models for GIS-based spatial predicting landslides at a regional scale. In Sassa K et al (eds) Landslide dynamics: ISDR-ICL landslide interactive teaching tools. Springer, Cham, pp 139–151. https://doi.org/10.1007/978-3-319-57774-6_10
15. Rahman, M., Ningsheng, C., Islam, M.M., Dewan, A., Iqbal, J., Washakh, R.M.A., Shufeng, T., 2019. Flood susceptibility assessment in Bangladesh using machine learning and multi-criteria decision analysis. Earth Syst. Environ. 3, 585–601.
16. Romulus Costache, Quoc Bao Pham, Mohammadtaghi Avand, Nguyen Thi Thuy Linh f, Matej Vojtek g, Jana Vojtekova, Sunmin Lee, Dao Nguyen Khoi, Pham Thi Thao Nhi, Tran Duc Dung. Novel hybrid models between bivariate statistics, artificial neural networks and boosting algorithms for flood susceptibility assessment. Journal of Environmental Management 265 (2020), 1-21, https://doi.org/10.1016/j.jenvman.2020.110485
17. Л. А. Афонин[L.A.AFONIN]. Явления, предшествующие наводнению // Проблемы прогнозирования наводнений (Problems of forecasting floods and flooding). - 2014. № 1. – С. 146 – 152.

18. Baktybekov K., Bekmukhamedov B., Muratbekov M., Altynbek S. The method of calculating of flooding zones on an territory with the use digital elevation model on the basis of successive pools// ISSN 1811-1165. Eurasian Physical Technical Journal, 2015, Vol.12, No.1 (23). – P. 14-19.
19. Baktybekov K., Bekmukhamedov B., Muratbekov M., Altynbek S. The method of calculation of parameters of the pressure wave on the rivers and determination of coastal inundation using digital elevation model// Bulletin of the L. N. Gumilyov ENU, Math series, 2014, №6. – P. 5-11.
20. http://old.aikyn.kz/ru/articles/show/10870-zhazdyk_n_sh_lde_bol_anda_
21. L. N. Ignatchenko,A. I. Kupchishin,A. B. Zhapbasbaev,D. A. Nurmagambetova, B. A. Casanovas, K. T. Lawaway, G. A. Boranbay, K. A. Asanovoy, L. P. Morozova, A. S. Kovalevoy, G. B. Turbocool Section 1 – Temperature air //Handbook on the climate of Kazakhstan. - 2004. - no. 1. - C. 51-54.
22. Yu. Pushistov, E. V. Viktorov "flood protection" to innovative integrated flood management approach //Floods: from protection to control. 2018. No. 1. – C. 18-25.
23. L. N. Ignatchenko,A. I. Kupchishin,A. B. Zhapbasbaev,D. A. Nurmagambetova, B. A. Casanovas, K. T. Lawaway, G. A. Boranbay, K. A. Szanowni, L. P. Morozova, A. S. Kovalevoy,G. B. Turbocool Rudersdal 2 –Precipitation //the Reference climate of Kazakhstan. - 2004. № 1. – C.13 – 25.
24. https://www.gismeteo.kz/weather-almaty-5205/
25. https://ru.wikipedia.org/wiki/Атмосферные_осадки
26. Loh, W.Y., 2011. Classification and Regression Trees. Available at:http://pages.stat.wisc.edu/~loh/treeprogs/guide/wires11.pdf (Accessed 2 September 2017).
27. Loh, W.Y., 2014. Fifty years of classification and regression trees (with discussions and rejoinder). International Statistical Review 82 (3). – P. 329 - 370.
28. D. S. Dzhumabaev, Convergence of iterative methods for unbounded operator equations, Mat. Zametki, 1987, Volume 41, Issue 5, 637– 645.

Кабдрахова С.С.

Алматы облысындағы болашақ су тасқындарын машиналық оқыту әдістерін пайдалана отырып болжау

Аңдатпа: Қазіргі заманғы ғылым мен техниканың дамуы бізге әлі қол жетімді емес көптеген мүмкіндіктерді жүзеге асыруға мүмкіндік береді. Мысалы, әртүрлі табиғи құбылыстар мен олардың жасырын қауіптерін зерттеу, сондай-ақ алдын ала апатты болдырмауын болжау, немесе сақтану іс әрекеттерді жасауға мүмкіндік тудырады. Аймақ, су тасқынының әсері және оның пайда болу жиілігі біздің өмірімізге бұрын-соңды болмаған дәрежеде әсер етеді. Қысқа мерзімде бұл оқиғалардың алдын алу өте қиын, бірақ тәуекелдерді болдырмау жоспары апаттың теріс салдарын азайтуы мүмкін. Бұл зерттеу жұмысы кездейсоқ орман ағашы, сызықтық регрессия, шешім қабылдау ағашы және градиенттік бустинг әдістері көмегімен болжаудың төрт моделін пайдалана отырып, Алматы қаласындағы Кіші Алматы өзені бассейніндегі су тасқынының болуын болжауға арналған.

Түйінді сөздер: су тасқынын болжау, машиналық оқыту, кездейсоқ орман ағашы әдісі, сызықтық регрессия әдісі, шешім қабылдау ағашы әдісі және градиенттік бустинг әдісі.

Кабдрахова С.С.

Прогнозирование будущих наводнений в Алматинской области с использованием методов машинного обучения

Аннотация. Развитие современной науки и техники позволяет нам реализовать многие возможности, которые еще не доступны. Например, изучение различных природных явлений и их скрытых опасностей, а также прогнозирование могут предотвратить или усилить профилактические мероприятия. Регион, наводнения и частота его возникновения влияют на

нашу жизнь в беспрецедентной степени. Очень трудно предотвратить эти события в краткосрочной перспективе, но план предотвращения рисков может уменьшить негативные последствия аварии. Настоящее исследование посвящено оценке потенциала наводнений в бассейне реки Малая Алматинка в Алматы с использованием четырех моделей прогнозирования случайного леса, линейной регрессии, дерево решений и градиентого бустинга.

Ключевые слова: прогнозирование наводнения, машинное обучение, метод случайного леса, метод линейной регрессии, метод дерева решений и метод градиентного бустинга.

About authors:

Symbat S. Kabdrakhova, PhD, 1) Senior lecturer of the Department of Computer Science of al-Farabi Kazakh National University 2) Leading researcher of the Department of Differential Equations, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling.

Сведения об авторах:

Кабдрахова Сымбат Сейсенбековна, кандидат физико-математических наук; старший преподаватель кафедры информатики Казахского Национального университета имени аль-Фараби; ведущий научный сотрудник Института математики и математического моделирования, отдела дифференциальных уравнений.

Авторлар туралы мәліметтер:

Кабдрахова Сымбат Сейсенбековна, физика-математика ғылымдарының кандидаты, 1) Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің информатика кафедрасының аға оқытушысы 2) Математика және математикалық модельдеу инстит

UDC 519.624

Kokotova Ye.V.

K. Zhubanov Aktobe Regional State University, Aktobe, Kazakhstan

BOUNDED SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH SINGULARITIES AND THEIR APPROXIMATIONS

Abstract. *Singular boundary value problems for a linear nonhomogeneous system of ordinary differential equations on a finite interval are considered. It is supposed that improper integrals of the norm of the coefficient matrix over semiaxes are infinite*

Key words: *ordinary differential equations, singular boundary value problem, bounded solution, approximation, behavior of solutions at singular points, the parameterization method.*

Numerous application problems give rise to differential equations on an infinite interval or with singularities at an endpoint. Various problems for such equations have been studied by many authors (see [1–8] and references therein). A survey of results on singular boundary value problems for second order ordinary differential equations, as well as examples of specific physical processes leading to them, can be found in [4].

It is known that one of the main issues of the theory of singular problems is the problem of their approximation by regular boundary value problems. The resolution of this problem allows us not only to construct an approximate method for finding solutions to singular boundary value problems, but also to establish effective criteria for their well-posedness in terms of approximating regular boundary value problems.

In [7,8], the questions of the existence of a unique solution of a linear differential equation bounded on the whole real line were studied by the parameterization method proposed by D. S. Dzhumabaev [9]. Approximating regular two-point boundary value problems were constructed to find the restriction of the bounded solution to a finite interval.

In the present paper, we consider the differential equation

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad x \in R^n, \tag{1}$$

where $t \in (0,T)$, $A(t)$, $f(t)$ are continuous on $(0,T)$, $\tilde{\alpha}(t) = ||A(t)|| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(t)|$, $i = 1,2,\ldots,n$, is a function continuous on $(0,T)$ and satisfying the conditions $\lim_{a \to 0+0} \int_a^{T/2} \tilde{\alpha}(t)dt = \infty$, $\lim_{b \to T-0} \int_{T/2}^{b} \tilde{\alpha}(t)dt = \infty$.

Let $\tilde{C}(J, R^n)$ denote the space of functions $x: J \to R^n$ continuous and bounded on $J \subseteq (0,T)$ with the norm $\| x \|_1 = \sup_{t \in J} \| x(t) \|$; by $\tilde{C}_{1/\alpha}(J, R^n)$ we denote the space of functions $f: J \to R^n$ continuous and bounded with the weight $1/\alpha(t)$, equipped with the norm $\| f \|_{1/\alpha} = \sup_{t \in J} \left\| \frac{f(t)}{\alpha(t)} \right\|$.

The problem of finding a solution of Eq. (1) bounded on $(0,T)$ when $f(t) \in \tilde{C}_{1/\alpha}((0,T), R^n)$ will be referred to as Problem 1_α.

In [10], Problem 1_α was studied using the parameterization method [9] with nonuniform partitioning of the interval $(0,T)$, where the partition points are chosen taking into account the values of the equation coefficients.

Let us take $\theta > 0$, $t_0 = \frac{T}{2}, \delta_0 > 0$ and make the partition $(0,T) = \bigcup_{r=-\infty}^{\infty} [t_{r-1}, t_r)$, where the points t_r, $r \in Z$, are determined from the relations $\int_{t_{r-1}}^{t_r} \alpha(t)dt = \theta$, $\alpha(t) = \max(\tilde{\alpha}(t), \delta_0)$.

Let $\bar{h}(\theta)$ denote a two-sided infinite sequence of numbers $h_r = t_r - t_{r-1}$, $r \in Z$, and m_n be the space of bounded two-sided infinite sequences $\lambda_r \in R^n$ with the norm

$$\| \lambda \|_2 = \|(\ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \ldots)'\|_2 = \sup_r \| \lambda_r \|, \; r \in Z.$$

Definition. Problem 1_α is called well-posed if, for any $f(t) \in \tilde{C}_{1/\alpha}((0,T), R^n)$, it admits a unique solution $x(t) \in \tilde{C}((0,T), R^n)$, and the following inequality is valid: $\|x\|_1 \le K \|f\|_\alpha$, where K is a constant independent of $f(t)$. We call K the constant of well-posedness of Problem 1_α.

In [10], necessary and sufficient conditions for the well-posedness of Problem 1_α in terms of a two-sided infinite block band matrix $Q_{\nu,\bar{h}(\theta)} : m_n \to m_n$, of the form

$$Q_{\nu,\bar{h}(\theta)} = \left\| \begin{matrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 0 & I + D_{\nu,r}(h_r) & -I & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & 0 & 0 & I + D_{\nu,r+1}(h_{r+1}) & -I & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\|,$$

where I is the identity matrix of order n,

$$D_{\nu,r}(h_r) = \sum_{j=0}^{\nu-1} \int_{t_{r-1}}^{t_r} A(\tau_1) \ldots \int_{t_{r-1}}^{\tau_j} A(\tau_{j+1}) d\tau_{j+1} \ldots d\tau_1, \quad \tau_0 = t_r, \; r \in Z.$$

In [11], the problem of finding an approximate solution to Problem 1_α is studied, to which we refer to as **Problem 2_α**. Given $\varepsilon > 0$, it is required to determine numbers $T_1, T_2 \in (0, T)$, real $(n \times n)-$matrices B, C, and $n-$vector d, such that the solution $x_{T_1,T_2}(t)$ to the two-point boundary value problem

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t),\ t \in (T_1, T_2),\ x \in R^n, \tag{2}$$

$$Bx(T_1) + Cx(T_2) = d, \tag{3}$$

satisfies the inequality $\max\limits_{x \in [T_1, T_2]} \left\| x_{T_1,T_2}(t) - x^*(t) \right\| < \varepsilon$, where $x^*(t)$ is a solution to Problem 1_α.

Problem 2_α is studied under the following assumptions:

1. The relations

$$\lim_{t \to 0+0} \frac{A(t)}{\alpha(t)} = A_0,\ \lim_{t \to T-0} \frac{A(t)}{\alpha(t)} = A_T;\ \operatorname{Re} \xi_i^0 \neq 0, \operatorname{Re} \xi_i^T \neq 0,$$

hold, where ξ_i^0 and $\xi_i^T, i = \overline{1,n}$ are the eigenvalues of the matrices A_0 and A_T, respectively.

2. $\lim\limits_{t \to 0+0} \dfrac{f(t)}{\alpha(t)} = f_0,\ \lim\limits_{t \to T-0} \dfrac{f(t)}{\alpha(t)} = f_T.$

The construction of approximating regular boundary value problems and establishing a mutual relationship between the well-posedness of the original problem and that of approximating problems in [11], as well as in [10], were carried out using the parameterization method with nonuniform partitioning.

In the present paper we study the behavior of the solution of Eq. (1) near the singular points. We consider the following problem.

Problem 3_α. For given functions $\beta_0(t)$ and $\beta_T(t)$ continuous on $(0; T/2]$ and $[T/2, T)$, respectively, it is required to find a solution $x^*(t)$ of Eq. (1) satisfying the following conditions:

$$\lim_{t \to 0+0} \| x^*(t) - \beta_0(t) \| = 0,\ \lim_{t \to T-0} \| x^*(t) - \beta_T(t) \| = 0. \tag{4}$$

In order to investigate Problem 3_α, we introduce the concept of a "limit solution" to Eq. (1) with weight $1/\alpha(t)$ as $t \to 0+0$ ($t \to T-0$).

Definition. A function $x_T(t)$ continuously differentiable on $[T/2, T)$ is called the limit solution to Eq. (1) with weight $1/\alpha(t)$ as $t \to T-0$, if

$$\lim_{t \to T-0} \left\| \frac{\dot{x}_T(t) - A(t)x_T(t) - f(t)}{\alpha(t)} \right\| = 0.$$

The limit solution $x_0(t)$ of Eq. (1) with weight $1/\alpha(t)$ as $t \to 0+0$ is defined in an analogous way.

Theorem 1. *Let Assumption **1** be fulfilled and* $\lim\limits_{t \to T-0} \left\| \dfrac{f(t)}{\alpha(t)} \right\| = 0$. *Then all solutions* $x(t)$ *of Eq. (1) bounded on* $[T/2, T)$ *satisfy the equation* $\lim\limits_{t \to T-0} \|x(t)\| = 0$.

Let $x_T(t)$ be a limit solution of Eq. (1) with weight $1/\alpha(t)$ as $t \to T-0$. We denote the set of solutions of Eq. (1) satisfying the condition $x(t) - x_T(t) \in \tilde{C}([T/2; T), R^n)$ by $X_T([T/2, T))$. The following theorem establishes an attracting property of the limit solution with weight $1/\alpha(t)$ as $t \to T-0$.

Theorem 2. *Let Problem* 1_α *be well-posed and* $x_T(t)$ *be a limit solution of Eq. (1) with weight* $1/\alpha(t)$ *as* $t \to T-0$. *Then* $X_T([T/2,T)) \neq \varnothing$, *and any solution* $x(t)$ *of Eq. (1) belonging to* $X_T([T/2,T))$ *satisfies the equation* $\lim\limits_{t\to T-0} \| x(t) - x_T(t) \| = 0$.

Note that analogous theorems hold true for the limit solution as $t \to 0+0$.

Suppose that Problem 1_α is well-posed and there exist limit solutions $x_0(t)$ and $x_T(t)$ of Eq. (1) with weight $1/\alpha(t)$ as $t \to 0+0$ and $t \to T-0$, respectively, that satisfy the conditions

$$\lim_{t\to 0+0} \| x_0(t) - \beta_0(t) \| = 0, \quad \lim_{t\to T-0} \| x_T(t) - \beta_T(t) \| = 0. \tag{5}$$

Let us choose some numbers $T_1 \in (0, T/2]$, $T_2 \in [T/2, T)$, a function $\bar{x}(t)$ continuously differentiable on $[T_1, T_2] \subset (0,T)$ that satisfies the conditions $\bar{x}(T_1) = x_0(T_1)$, $\bar{x}(T_2) = x_T(T_2)$, and construct the following function continuously differentiable on $(0,T)$:

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x_0(t), & t \in (0, T_1], \\ \bar{x}(t), & t \in [T_1, T_2]. \\ x_T(t), & t \in [T_2, T) \end{cases}$$

By the substitution $y(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$ we get

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \tilde{F}(t), \; t \in (0,T), \; y \in R^n, \tag{6}$$

where $\tilde{F}(t) = -\dot{\tilde{x}}(t) + A(t)\tilde{x}(t) + f(t) \in \tilde{C}_{1/\alpha}((0,T), R^n)$ and $\lim\limits_{t\to 0+0} \left\| \frac{\tilde{F}(t)}{\alpha(t)} \right\| = 0, \; \lim\limits_{t\to T-0} \left\| \frac{\tilde{F}(t)}{\alpha(t)} \right\| = 0.$

Since Problem 1_α is well-posed, Eq. (6) admits a unique solution $y^*(t)$ bounded on $(0,T)$. By Theorem 1 we get

$$\lim_{t\to 0+0} \left\| y^*(t) \right\| = 0, \; \lim_{t\to T-0} \| y^*(t) \| = 0. \tag{7}$$

It follows from (5)-(7) that the function $x^*(t) = y^*(t) + \tilde{x}(t)$ satisfies Eq. (1) and relations (4).

Assume that $\hat{x}(t)$ is another solution of Problem 3_α. Then the function $x^*(t) - \hat{x}(t)$ is a bounded on $(0,T)$ solution of the homogeneous equation $\frac{dx}{dt} = A(t)x$. Due to the well-posedness of Problem 1_α we have $x^*(t) = \hat{x}(t)$, meaning that- Problem 3_α has only one solution. Thus, the following statement holds true.

Theorem 3. *Let Problem* 1_α *be well-posed and there exist limit solutions* $x_0(t)$ *and* $x_T(t)$ *of Eq. (1) with weight* $1/\alpha(t)$ *as* $t \to 0+0$ *and* $t \to T-0$, *respectively, that satisfy conditions (5). Then Problem* 3_α *has a unique solution.*

Let us note in conclusion that under assumptions 1 and 2 and conditions of Theorem 3 for the coefficients and the right-hand side of Eq. (6), the regular two-point boundary value problem

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \tilde{F}(t), \qquad t \in (T_1, T_2), \tag{8}$$

$$P_1 S_0 A_0 y(T_1) + P_2 S_T A_T y(T_2) = d, \tag{9}$$

approximating the problem of finding a solution of Eq. (6) bounded on $(0,T)$ (see Theorem 2 in [11]), allows one, with a given accuracy, to determine a restriction of the solution of problem 3_α to any interval $[T_1,T_2]\subset(0,T)$. Here S_0 and S_T are real nonsingular $(n\times n)$ matrices that reduce the matrices A_0 and A_T, respectively, to the generalized Jordan form $\tilde{A}_0 = S_0 A_0 S_0^{-1} = \begin{Vmatrix} A_{11}^0 & 0 \\ 0 & A_{22}^0 \end{Vmatrix}$, $\tilde{A}_T = S_T A_T S_T^{-1} = \begin{Vmatrix} A_{11}^T & 0 \\ 0 & A_{22}^T \end{Vmatrix}$.

Here A_{11}^0 and A_{22}^0 (A_{11}^T and A_{22}^T) consist of generalized Jordan boxes corresponding to the eigenvalues of the matrices A_0 (A_T) with negative and positive real parts, respectively; we denote their numbers by n_1^0 and n_2^0 (n_1^T and n_2^T); $P_1 = \begin{Vmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $P_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{Vmatrix}$, where I_{n_r}, $r = 1,2$, are the identity matrices of order $n_r = n_r^0 = n_r^T$, $r=1,2$.

Taking into account $x^*(t) = y^*(t) + \tilde{x}(t)$, we can conclude that the approximation estimate for Problem 3_α depends on that for $y^*(t)$ by the solutions of two-point boundary value problems (8) and (9), where $\tilde{F}(t)$ and the right-hand side of (9) are determined via $\tilde{x}(t)$.

REFERENCES

1. Pliss, V.A. Bounded solutions of nonhomogeneous linear systems of differential equations. *Problems of the asymptotic theory of nonlinear oscillations*, Kiev: Naukova Dumka, 1977, 168-173 (in Russian)
2. Abramov, A.A., Konyukhova, N.B., and Balla, K. Stable initial manifolds and singular boundary value problems for systems of ordinary differential equations, Computational Mathematics (Warsaw,1980). Banach Center Publs. Warsaw: PWN – Polish Scient, Publishers, 13(1984), 319-351.
3. Abramov, A. A. and Konyukhova, N. B., Transfer of Admissible Boundary Conditions from a Singular Point for Systems of Linear Ordinary Differential Equations, Moscow, Computing Centre of USSR Academy of Sciences: 1985 (in Russian).
4. Kiguradze, I.T. and Shekhter, B.L. Singular boundary value problems for ordinary second-order differential equations. J Math Sci, 43, 2340–2417 (1988). https://doi.org/10.1007/BF01100361
5. Kiguradze, I.T. On Boundary Value Problems for Linear Differential Systems with Singularities. Differential Equations, 39, 212–225 (2003). https://doi.org/10.1023/A:1025152932174
6. Kudryavtsev, L. D. Problems with asymptotic initial data for systems of ordinary differential equations, DOKL. AKAD.NAUK, 407:2 (2006), 172-175 (in Russian).
7. Dzhumabayev, D. S. Approximation of the bounded solution of an ordinary linear differential equation by solutions of two-point boundary-value problems, USSR Comput. Math. Math. Phys., 30:2 (1990), 34–45
8. https://doi.org/10.1016/0041-5553(90)90074-3.
9. Dzhumabaev, D. S. Approximation of bounded solutions and exponential dichotomy on the axis, USSR Comput. Math. Math. Phys., 30:6 (1990), 32–43 https://doi.org/10.1016/0041-5553(90)90106-3.
10. Dzhumabayev, D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary- value problem for an ordinary differential equation, USSR Comput. Math. Math. Phys., 29:1 (1989), 34–46 https://doi.org/10.1016/0041-5553(89)90038-4
11. Kokotova, Ye.V. Bounded solutions of linear systems of ordinary differential equations with unbounded coefficients, Mathematical Journal, 5:1(15) (2005), 67-74 (in Russian).

12. Kokotova, Ye.V. Approximation of a bounded solution of systems of linear ordinary differential equations with unbounded coefficients, Mathematical Journal, 5: 3(17) (2005), 40-43 (in Russian).

Кокотова Е.В.
Сингулярлы дифференциалдық жүйелердің шектелген шешімдері және олардың аппроксимациялары

Аңдатпа: Шектелген аралықтағы жай дифференциалдық теңдеулердің сызықты біртекті емес жүйесі үшін сингулярлық шекаралық есептер қарастырылады. Жартылай аралықтарда коэффициенттер матрицасының нормасынан алынған меншіксіз интегралдар шексіз деп ұйғарылған.

Түйінді сөздер: жай дифференциалдық теңдеулер, сингулярлық шекаралық есеп, шектелген шешім, аппроксимациялар, ерекше нүктелердегі шешімдердің әрекеті, параметрлеу әдісі

Кокотова Е.В.
Ограниченные решения дифференциальных систем с сингулярностями и их аппроксимации

Аннотация. Рассматриваются сингулярные краевые задачи для линейной неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений на конечном интервале. Предполагается, что на полуинтервалах несобственные интегралы от нормы матрицы коэффициентов бесконечны.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, сингулярная краевая задача, ограниченное решение, аппроксимации, поведение решений в особых точках, метод параметризации.

About the author:
Yelena V. Kokotova-Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of MathematicsK. Zhubanov Aktobe Regional State University

Сведения об авторе:
Кокотова Елена Викторовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова.

УДК 517.968.21

S.T. Mynbayeva[1,2,*], S.G. Karakenova[3]

[1]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling CS MES RK, Almaty,
[2]K. Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe,
[3]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty

AN APPROACH TO SOLVING A NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

Summary. *A nonlinear boundary value problem for a Fredholm integro-differential equation is considered. The interval where the problem is considered is partitioned and the values of a solution to the problem at the left endpoints of the subintervals are introduced as additional parameters. The introduction of additional parameters gives initial values at the left endpoints of subintervals for new unknown functions. The* *considered integro-differential equation is reduced to a special Cauchy problem with parameters for a system of integro-differential equations. If this problem is solvable, then its solution can be represented using the introduced parameters and known values of the integro-differential equation. By substituting these representations into the boundary condition and the continuity conditions of the solution at the interior partition points, a system of nonlinear algebraic equations in the introduced parameters is constructed. The solvability of the boundary value problem is reduced to that of the system of algebraic equations. The conditions for the existence of a solution to the auxiliary system of algebraic equations are established.*

***Key words**: nonlinear boundary value problem for the Fredholm integro-differential equation, special Cauchy problem, Dzhumabaev parameterization method.*

Introduction

Integro-differential equations often occur in various fields of natural science as mathematical models of real processes. As a rule, these processes are governed by nonlinear laws and, consequently, are described by nonlinear equations. The non-linearity of integro-differential equations leads to fundamental difficulties in solving problems for these equations and in establishing their qualitative properties.

Various initial and boundary value problems for integro-differential equations have been studied by many authors. They developed qualitative research methods, approximate and numerical methods for finding solutions to problems for integro-differential equations. Fredholm integro-differential equations have a number of features that should be taken into account when setting problems for these equations and developing methods for solving them.

In particular, as shown in [1, 2], a linear inhomogeneous Fredholm integro-differential equation can be unsolvable without additional conditions to the solution. Note that the criteria for solvability and unique solvability of linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations were obtained relatively recently [3]. In [4], the solvability conditions for the linear Fredholm integro-differential equation and boundary value problems for this equation are established.

Nonlinear problems are mainly solved by iterative methods. In this paper, we study the solvability of a nonlinear boundary value problem for the Fredholm integro-differential equation using the Dzhumabaev parametrization method [5].

Methods and results

We consider the nonlinear boundary value problem for the Fredholm integro-differential equation

$$\frac{dx}{dt} = f_0(t,x) + \int_0^T f_1\big(t,\tau,x(\tau)\big)d\tau, \quad t \in [0,T], \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

$$g[x(0), x(T)] = 0, \tag{2}$$

where $f_0: [0,T] \times R^n \to R^n$, $f_1: [0,T] \times [0,T] \times R^n \to R^n$, $g: R^n \times R^n \to R^n$ are continuous, $\|x\| = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|$.

Let $C([0,T], R^n)$ denote the space of continuous functions $x: [0,T] \to R^n$ with the norm $\|x(t)\|_1 = \max_{t\in[0,T]} \|x(t)\|$.

The solution to problems (1) and (2) is continuously differentiable on $[0,T]$ vector function $x(t) \in C([0,T], \mathbb{R}^n)$ that satisfies the system of integro-differential equations (1) (at the points t=0, t=T, the system (1) is satisfied by one-sided derivatives $\dot{x}_{right}(0)$, $\dot{x}_{left}(T)$) and having at $t = 0$, $t = T$ the values $x(0)$, $x(T)$, for which equality (2) is true.

We divide the interval $[0,T)$ into N parts: $[0,T) = \cup_{r=1}^{N} [(r-1)h, rh)$ with step size $h > 0$: $Nh = T$ $(N = 1,2,\dots)$. Let $x_r(t)$ denote the restriction of the function $x(t)$ on the rth subinterval $[(r-1)h, rh)$, i.e. $x_r(t) = x(t)$ for $t \in [(r-1)h, rh)$. Problems (1) and (2) are reduced to the equivalent multipoint problem

$$\frac{dx_r}{dt} = f_0(t, x_r) + \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} f_1\left(t, \tau, x_j(\tau)\right) d\tau, \qquad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1, N}. \tag{3}$$

$$g\left[x_1(0), \lim_{t \to T-0} x_N(t)\right] = 0, \tag{4}$$

$$\lim_{t \to sh-0} x_s(t) = x_{s+1}(sh), s = \overline{1, N-1}, \tag{5}$$

where (5) are the continuity conditions of a solution at the interior partition points.

We denote by $C([0,T], h, R^{nN})$ the space of function systems $x[t] = \left(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)\right)$, where $x_r: [(r-1)h, rh) \to R^n$ are continuous functions having finite left-sided limits $\lim_{t \to rh-0} x_r(t)$, $r = \overline{1, N}$, with the norm $\|x[\cdot]\|_2 = \max_{r=\overline{1,N}} sup_{t \in [(r-1)h, rh)} \|x_r(t)\|$.

If $x^*(t)$ is a solution to boundary value problems (1) and (2), then the system of its restrictions $x^*[t] = \left(x_1^*(t), x_2^*(t), \dots, x_N^*(t)\right)$ is a solution to multipoint boundary value problem (3)-(5). Conversely, if a function system of $\tilde{x}[t] = \left(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_N(t)\right)$ is a solution to problems (3)-(5), then the function $\tilde{x}(t)$ obtained by splicing the function system is a solution to boundary value problems (1) and (2).

By introducing parameters $\lambda_r = x_r\left((r-1)h\right)$ and substituting $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, $r = \overline{1, N}$, on each r th subinterval, we get the multipoint boundary value problem with parameters

$$\frac{du_r}{dt} = f_0(t, u_r + \lambda_r) + \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} f_1(t, \tau, u_j(\tau) + \lambda_j) d\tau, \qquad t \in [(r-1)h, rh), \tag{6}$$

$$u_r\left((r-1)h\right) = 0, \qquad r = \overline{1, N}, \tag{7}$$

$$g\left[\lambda_1, \lambda_N + \lim_{t \to T-0} u_N(t)\right] = 0, \tag{8}$$

$$\lambda_s + \lim_{t \to sh-0} u_s(t) = \lambda_{s+1}, \qquad s = \overline{1, N-1}. \tag{9}$$

A pair $(\lambda^*, u^*[t])$ with elements $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*) \in R^{nN}$, $u^*[t] = \left(u_1^*(t), u_2^*(t), \dots, u_N^*(t)\right) \in C([0,T], h, R^{nN})$ is called a solution to problems (6) to (9) if the function $u_r^*(t)$ is continuously differentiable on $[(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1, N}$, and, for $\lambda = \lambda^*$, satisfies systems (6), (8) and (9) and initial condition (7).

In [6], sufficient conditions for the existence of a unique solution to special Cauchy problems (6) and (7) and an estimate of the difference of its solutions corresponding to different values of the parameter were obtained. By using the algorithm proposed in [7] for fixed values of $\hat{\lambda} \in R^{nN}$, the system of functions $u[t, \hat{\lambda}]$ can be determined from the special Cauchy problem for the system of integro-differential equations (6) and (7).

If $\tilde{x}(t)$ is a solution to problems (1) and (2), then we compose the vector $\tilde{\lambda} = \left(\tilde{x}(0), \tilde{x}(h), \dots, \tilde{x}((N-1)h)\right) \in R^{nN}$ and the function system $\tilde{u}[t] = \left(\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t), \dots, \tilde{u}_N(t)\right)$, where $\tilde{u}_r(t)$ is the restriction of the function $\tilde{x}(t) - \tilde{x}\left((r-1)h\right)$ on the rth interval. It is obvious that $\tilde{u}[t] \in C([0,T], h, R^{nN})$ and the pair $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$ is a solution to problems (6)-(9). And vice versa, if $u^*[t] = u[t, \lambda^*]$ and the pair $(\lambda^*, u^*[t])$ is a solution to problems (6)-(9), the function $x^*(t)$, defined by the equalities

$x^*(t) = \lambda_r^* + u_r^*(t),\ t \in [(r-1)h, rh),\ r = \overline{1,N}$ and $x^*(T) = \lambda_N^* + \lim_{t\to T-0} u_N^*(t)$, is a solution to the original problems (1) and (2).

For a fixed value of the parameter $\lambda \in R^{nN}$, the problems (6) and (7) is equivalent to the system of Volterra integral equations of the second kind

$$u_r(t) = \int_{(r-1)h}^{t} \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} f_1(\tau_1, \tau, u_j(\tau) + \lambda_j) d\tau d\tau_1 + \int_{(r-1)h}^{t} f_0(\tau_1, u_r(\tau_1) + \lambda_r) d\tau_1, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1,N}. \tag{10}$$

Defining $\lim_{t\to rh-0} x_r(t),\ r = \overline{1,N}$, from (10) and substituting them in (8) and (9), we obtain the system of nonlinear algebraic equations in the parameters λ:

$$g\left[\lambda_1, \lambda_N + \int_{(N-1)h}^{Nh} \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} f_1(\tau_1, \tau, u_j(\tau) + \lambda_j) d\tau d\tau_1 + \int_{(N-1)h}^{Nh} f_0(\tau_1, u_N(\tau_1) + \lambda_N) d\tau_1\right] = 0, \tag{11}$$

$$\lambda_s + \int_{(s-1)h}^{sh} \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} f_1(\tau_1, \tau, u_j(\tau) + \lambda_j) d\tau d\tau_1 + \int_{(s-1)h}^{sh} f_0(\tau_1, u_N(\tau_1) + \lambda_N) d\tau_1 - \lambda_{s+1} = 0, \quad s = \overline{1, N-1}. \tag{12}$$

We write the system of equations (10) and (11) as follows:

$$Q_*(h; \lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}^{nN}. \tag{13}$$

Given a vector $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}) \in R^{nN}$, we define the piecewise constant vector-function $x^{(0)}(t)$ by the equalities $x^{(0)}(t) = \lambda_r^{(0)},\ t \in [(r-1)h, rh),\ r = \overline{1,N},\ x^{(0)}(T) = \lambda_N^{(0)}$.

Let $PC([0,T], h, R^n)$ denote the space of piecewise continuous functions $x(t): [0,T] \to R^n$ with the possible discontinuity points $t_i = (i-1)h,\ i = \overline{1, N-1}$, with the norm $\|x\|_3 = \sup_{t\in[0,T]} \|x(t)\|$.

Taking some numbers $\rho_\lambda > 0, \rho > \rho_\lambda$, we compose the sets

$$G_0(\rho) = \{(t,x): t \in [0,T], \|x - x^{(0)}(t)\| < \rho\},$$

$$G_1(\rho) = \{(t,s,x): t \in [0,T], s \in [0,T], \|x - x^{(0)}(s)\| < \rho\},$$

$$S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) = \{\lambda \in R^{nN}: \|\lambda - \lambda^{(0)}\| < \rho_\lambda\},$$

$$S(x^{(0)}(t), \rho) = \{x(t) \in \mathbb{PC}([0,T], h, \mathbb{R}^n): \|x - x_0\|_3 < \rho\},$$

$$S(0, \rho_u) = \{u[t] \in C([0,T], h, R^{nN}): \|u[\cdot]\|_2 < \rho_u\}, \rho_u \le \rho - \rho_\lambda.$$

Condition A. The functions $f_0(t,x),\ f_1(t,s,x)$ *are continuous in* $G_0(\rho),\ G_1(\rho)$, *respectively, have continuous partial derivatives* $\frac{\partial f_0(t,x)}{\partial x}, \frac{\partial f_1(t,s,x)}{\partial x}$ *and satisfy the inequalities* $\left\|\frac{\partial f_0(t,x)}{\partial x}\right\| \le L_0, (t,x) \in G_0(\rho)$, $\left\|\frac{\partial f_1(t,s,x)}{\partial x}\right\| \le L_1, (t,s,x) \in G_1(\rho)$.

Condition B. The function $g(v,w)$ *has uniformly continuous partial derivatives* $g'_v(v,w)$ *and* $g'_w(v,w)$ *in* $G_2(\rho,\rho) = \{(v,w) \in \mathbb{R}^{2n}: \|v - x^{(0)}(0)\| < \rho, \|w - x^{(0)}(T)\| < \rho\}$.

Theorem 1. Let $\lambda^* \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ *be a solution to equation (13) and* $u^*[t] \in S(0, \rho_u)$ *be a solution to special Cauchy problems (6) and (7) for* $\lambda = \lambda^*$. *Then the function* $x^*(t)$, *defined by the equalities* $x^*(t) = \lambda_r^* + u_r^*(t),\ t \in [(r-1)h, rh),\ r = \overline{1,N}$, *and* $x^*(T) = \lambda_N^* + \lim_{t\to T-0} u_N^*(t)$, *is a solution to problems (1) and (2) and* $x^*(t) \in S(x^{(0)}(t), \rho)$.

To solve the system of nonlinear algebraic equations (13), we use the following statement.

Theorem 2. Let the following conditions be fulfilled:

(i) *the Jacobi matrix* $\frac{\partial Q_*(\Delta_N;\lambda)}{\partial\lambda}$ *is uniformly continuous in* $S(\lambda^{(0)},\rho_\lambda)$;

(ii) $\frac{\partial Q_*(\Delta_N;\lambda)}{\partial\lambda}$ *is invertible and* $\left\|\left[\frac{\partial Q_*(\Delta_N;\lambda)}{\partial\lambda}\right]^{-1}\right\| \le \gamma^*$ *for all* $\lambda \in S(\lambda^{(0)},\rho_\lambda)$, γ^**is const;*

(iii) $\gamma^*\|Q_*(\Delta_N;\lambda^{(0)})\| < \rho_\lambda$.

Then there exists $\alpha_0 \ge 1$ *such that for any* $\alpha \ge \alpha_0$ *the sequence* $\{\lambda^{(k+1)}\}$, *generated by the iterative process*

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} - \frac{1}{\alpha}\left[\frac{\partial Q_*(\Delta_N;\lambda^{(k)})}{\partial\lambda}\right]^{-1} Q_*(\Delta_N;\lambda^{(k)}), \quad k = 0,1,2,\dots, \tag{14}$$

converges to λ^*, *an isolated solution to equation (14) in* $S(\lambda^{(0)},\rho_\lambda)$, *and*

$$\|\lambda^* - \lambda^{(0)}\| \le \gamma^*\|Q_*(\Delta_N;\lambda^{(0)})\|. \tag{15}$$

Conclusion

In this paper, we proposed an approach to solving a nonlinear boundary value problem for the Fredholm integro-differential equation. This approach is based on the parameterization method.

This research is supported by the Ministry of Education and Science of the Republic Kazakhstan Grant № AP 05132486.

REFERENCES

1. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. – Boston: VSP, Utrecht, 2004. – 317 p.
2. Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations // J. Comput. Appl. Math. – 2016. – Vol. 294. – P. 342-357.
3. Dzhumabaev D.S. A Method for Solving the Linear Boundary Value Problem for an Integro Differential Equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2010 – Vol. 50, №7. – P. 1150-1161.
4. Dzhumabaev D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems // J. Comput. Appl. Math. – 2018. – Vol. 327. – P. 79-108.
5. Dzhumabaev D.S. Conditions for Unique Solvability of a Linear Boundary Value Problem for an Ordinary Differential Equation // Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. – 1989. – № 29. – P. 50-66 (in Russian).
6. Bakirova E.A. Existence and uniqueness of the solution of the special Cauchy problem for non-linear integro-differential equations // Mathematical Journal. – 2011. – T. 11, №1(39). –P. 43-52 (in Russian).
7. Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A., Mynbayeva S.T. Numerical realization of one algorithm for finding a solution of special cauchy problem for fredholm nonlinear integro-differential equations // Mathematical Journal. – 2017. – T. 17, №4(66). – P. 25-36 (in Russian).

Мынбаева С.Т., Каракенова С.Г.

Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін сызықты емес шеттік есепті шешудің бір тәсілі туралы

Аңдатпа: Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін сызықты емес шеттік есеп қарастырылады. Есеп қарастырылатын аралық бөліктерге бөлінеді және есеп шешімінің ішкі аралықтардың бастапқы нүктелеріндегі мәндері қосымша параметрлер ретінде енгізіледі. Қосымша параметрлерді енгізу жаңа белгісіз функциялар үшін ішкі аралықтардың сол жақ шеткі нүктелерінде бастапқы мәндерді береді. Зерттеліп отырған интегралдық-дифференциалдық теңдеу интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін параметрлері бар арнайы Коши есебіне келтіріледі. Егер бұл есеп шешілімді болса, онда оның шешімін енгізілген параметрлер мен интегралдық-дифференциалдық теңдеудің белгілі шамалары арқылы өрнектеуге болады. Осы өрнектерді шеттік шартқа және бөліктеудің ішкі нүктелеріндегі шешімнің үзіліссіздік шарттарына қоя отырып, енгізілген параметрлерге қатысты сызықты емес алгебралық теңдеулер жүйесі құрылады. Шеттік есептің шешілімділігі алгебралық теңдеулер жүйесінің шешімділігіне келтіріледі. Көмекші алгебралық теңдеулер жүйесінің шешімінің бар болу шарттары алынды.

Түйінді сөздер: Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін сызықты емес шеттік есеп, арнайы Коши есебі, Жұмабаевтың параметрлеу әдісі

Мынбаева С.Т., Каракенова С.Г.

Об одном подходе к решению нелинейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма

Аннотация. Рассматривается нелинейная краевая задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма. Интервал где рассматривается задача делится на части и значения решения в начальных точках подинтервалов вводятся в качестве дополнительных параметров. Введение дополнительных параметров дает начальные условия в левых точках подинтервалов для новых неизвестных функций. Рассматриваемое интегро-дифференциальное уравнение сводится к специальной задаче Коши с параметрами для системы интегро-дифференциальных уравнений. Если эта задача разрешима, то ее решение можно представить с помощью введенных параметров и известных величин интегро-дифференциального уравнения. Подставляя представление решения в краевое условие при соответствующих значениях и условия непрерывности решения во внутренних точках разбиения, составляется система нелинейных алгебраических уравнений относительно введенных параметров. Разрешимость нелинейной краевой задачи сводится к разрешимости системы алгебраических уравнений. Установлены условия существования решения вспомогательной системы нелинейных алгебраических уравнений.

Ключевые слова: нелинейная краевая задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма, специальная задача Коши, метод параметризации Джумабаева.

Сведения об авторах:

Мынбаева Сандугаш Табылдиевна, PhD, студент 3 курса Актюбинского регионального университета имени К. Жубанова, научный сотрудник Института математики и математического моделирования.

Каракенова Саяхат Габлетовна, PhD, студент 2 курса Казахского Национального университета имени аль-Фараби.

About authors:

Sandugash T. Mynbayeva,

K. Zhubanov Aktobe Regional University, PhD student, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, researcher.

Sayakhat G. Karakenova, PhD student, Al-Farabi Kazakh National University.

UDK 519.624

K. Nazarova*, K. Usmanov, L. Asylkhanova

Akhmet Yassawi University, Turkistan, Kazakhstan

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SINGULARITIES

Abstract. *The parametrization method is used to investigate a linear two-point boundary value problem for a system of differential equations with singularities. The necessary conditions for the existence of a solution to the problem under consideration are established and an algorithm for finding their solution is proposed.*

Key words: *Boundary value problem, system of differential equations, conformable derivative, conformable integral, the parametrization method.*

Introduction.

In [1-10], definitions and basic properties of the conformable derivative were introduced.

Definition 1. Let the function $f:[0,\infty)\to R$. Then, for all $t>0$, the conformable derivative of the function f is defined as

$$T_\alpha(f)(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon},$$

where $\alpha\in(0,1)$. If f is differentiable in α order in $(0,a)$, $a>0$, and there is a $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} f^{(\alpha)}(t)$ then

$$f^{(\alpha)}(0)=\lim_{\varepsilon\to 0+} f^{(\alpha)}(t).$$

Definition 2. The Conformable integral of the f function of order $\alpha\in(0,1]$ is defined by the equality

$$I_\alpha^a(f)(t)=\int_a^t \tau^{\alpha-1} f(\tau)\,d\tau\cdot$$

Lemma 1. Let for $t>0$ the functions f and g be differentiable in the order $\alpha\in(0,1)$. Then

1) $T_\alpha(af+bg)=aT_\alpha(f)+bT_\alpha(g)$, for all $a,b\in R$.
2) $T_\alpha(c)=0$, for all $f(t)=const$.
3) $T_\alpha(fg)=fT_\alpha(f)+T_\alpha(f)g$.
4) $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{fT_\alpha(f)-T_\alpha(f)g}{g^2}$.
5) If f is differentiable, then $T_\alpha(f)(t)=t^{1-\alpha}\frac{df}{dt}(t)$.

Lemma 2. Let $\alpha\in(0,1]$ and f functions be continuous under $t>a$, then

$$T_\alpha I_\alpha^a(f)(t)=f(t).$$

In this paper we consider a two point boundary value problem for systems of differential equations with a conformable derivative on the segment $[0,T]$

$$T_\alpha(x)(t)=A(t)x+f(t),\quad \mathrm{t}\in[0,T], \tag{1}$$

$$Bx(0)+Cx(T)=d,\ d\in R^n, \tag{2}$$

where $(n\times n)$-matrix $t^{\alpha-1}A(t)$ and n-dimensional vector-function $f(t)$ are continuous on $[0,T]$,

$$\| A(t) \| = \max_{t\in[0,T]} \left\{ \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(t)| \right\} \le a \cdot$$

We need to find a vector function $[0,T]$ that is continuous on $(0,T)$ and continuously differentiable on $x(t)$ that satisfies the system of differential equations (1) and boundary conditions (2).

The boundary value problems (1) and (2) are investigated by using the parametrization method proposed by Professor D. Dzhumabaev [11]. Based on this method, the necessary conditions for the solvability of the problem under study are established and an algorithm for finding a solution is proposed.

Methods.

We take the step $h > 0$, which N times fits on the segment $[0,T]$ and we will produce splitting $[0,T) = \bigcup_{r=1}^{N} [(r-1)h, rh) \cdot$

The narrowing of the function $x(t)$ to $r-$the interval $[(r-1)h, rh)$ is denoted by $x_r(t)$, i.e., $x_r(t)$ is a system of vector functions defined and coinciding with $x(t)$ on $[(r-1)h, rh)$. Then the original two point boundary value problem for systems of differential equations will be reduced to an equivalent multi point boundary value problem

$$T_{\alpha.r}(x_r)(\mathrm{t}) = A(t)x_r + f(t), \quad t \in [(r-1)h, rh), \tag{3}$$

$$Bx_1(0) + C \lim_{t\to T-0} x_N(t) = d, \tag{4}$$

$$\lim_{t\to sh-0} x_s(t) = x_{s+1}(sh), \quad s = \overline{1, N-1}\ . \tag{5}$$

Here (5) are the gluing conditions at the inner points of the split $t = jh,$, $j = \overline{1, N-1}$.

If the function $x(t)$ is the solution of problems (1) and (2), the system contractions $x[t] = (x_1(t), x_2(t), ..., x_N(t))'$ will be the solution of multipoint boundary value problems (3) - (5). Conversely, if the system of vector functions $\tilde{x}[t] = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), ..., \tilde{x}_N(t))'$ is the solution of problems (3) - (5), the function $\tilde{x}(t)$ defined by the equalities $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_r(t)$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1, N}$, $\tilde{x}(T) = \lim_{t\to T-0} \tilde{x}_N(t)$ is the solution to the initial boundary value problems (1) and (2).

Using λ_r, we denote the value of the $x_r(t)$ functions at the $t = (r-1)h$ point and replace $[(r-1)h, rh)$ at each interval of $x_r(t) = u_r(t) + \lambda_r$, $r = \overline{1, N}$. then problems (3) - (5) are reduced to an equivalent multipoint boundary value problem with parameters

$$T_{\alpha,r}(u_r)(t) = A(t)[u_r + \lambda_r] + f(t), \tag{6}$$

$$u_r[(r-1)h] = 0,\ t \in [(r-1)h, rh),\ r = \overline{1, N}, \tag{7}$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_N + C \lim_{t\to T-0} u_N(t) = d, \tag{8}$$

$$\lambda_s + \lim_{t\to sh-0} u_s(t) = \lambda_{s+1},\ s = \overline{1, N-1}. \tag{9}$$

Tasks (3) to (5) and (6) to (9) are equivalent in the sense that if the system functions $x[t] = (x_1(t), x_2(t), ..., x_N(t))'$ is the solution of problems (3) - (5), the pair $(\lambda, u[t])$ where

$\lambda=(x_1(0),x_2(h),...,x_N(N-1)h))'$, $u[t]=(x_1(t)-x_1(0),x_2(t)-x_2(h),...,x_N(t)-x_N((N-1)h))$, will be the solution of problem (6) - (9). Conversely, if the pair $(\tilde{\lambda},\tilde{u}[t])$ where $\tilde{\lambda}=(\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2,...,\tilde{\lambda}_N)'$, $\tilde{u}[t]=(\tilde{u}_1(t),\tilde{u}_2(t),...,\tilde{u}_N(t))'$ is the solution of problems (6)-(9), the system functions $\tilde{x}[t]=(\tilde{\lambda}_1+\tilde{u}_1(t),\tilde{\lambda}_2+\tilde{u}_2(t),...,\tilde{\lambda}_N+\tilde{u}_N(t))'$, are the solution of problems (3)-(5).

The appearance of the initial conditions $u_r[(r-1)h]=0,\ \ r=\overline{1,N},$ allow for fixed values of $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_N)'$ to determine the functions of $u_r(t)$, $r=\overline{1,N}$, from systems of integral equations

$$u_r(t)=\int_{(r-1)h}^{t}\tau^{\alpha-1}A(\tau)u_r(\tau)d\tau+\int_{(r-1)h}^{t}\tau^{\alpha-1}A(\tau)\lambda_r d\tau+\int_{(r-1)h}^{t}\tau^{\alpha-1}f(\tau)d\tau,\qquad t\in[(r-1)h,rh),\ r=\overline{1,N}. \tag{10}$$

From (10) defining $\lim\limits_{t\to Nh-0}u_N(t),\ \lim\limits_{t\to sh-0}u_s(t),\ s=\overline{1,N-1}$, substituting their corresponding expressions in conditions (8) and (9) and multiplying both parts (8) by $h>0$, we get a system of linear equations with respect to unknown parameters λ_r, $r=\overline{1,N}$:

$$hB\lambda_1+hC\lambda_N+hC\int_{(N-1)h}^{Nh}\tau^{\alpha-1}A(\tau)d\tau\lambda_N=hd-hC\int_{(N-1)h}^{Nh}\tau^{\alpha-1}f(\tau)d\tau-hC\int_{(N-1)h}^{Nh}\tau^{\alpha-1}A(\tau)u_N(\tau)d\tau, \tag{11}$$

$$\lambda_s+\int_{(s-1)h}^{sh}\tau^{\alpha-1}A(\tau)\lambda_s d\tau-\lambda_{s+1}=-\int_{(s-1)h}^{sh}\tau^{\alpha-1}A(\tau)\,u_N(\tau)\,d\tau-\int_{(s-1)h}^{sh}\tau^{\alpha-1}f(\tau)d\tau,\qquad s=\overline{1,N-1}. \tag{12}$$

The matrix of dimension $nN\times nN$ corresponding to the left side of the systems of linear equations (11) and (12) is denoted by $Q(h)$. Then the system of linear equations (11) and (12) is written as

$$Q(h)\lambda=-F(h)-G(u,h),\quad \lambda\in R^{nN}, \tag{13}$$

where

$$F(h)=\left(-hd+hC\int_{(N-1)h}^{Nh}\tau^{\alpha-1}f(\tau)d\tau,\int_{0}^{h}\tau^{\alpha-1}f(\tau)d\tau,\ \ldots,\int_{(N-2)h}^{(N-1)h}\tau^{\alpha-1}f(\tau)d\tau\right),$$

$$G(u,h)=\left(hC\int_{(N-1)h}^{Nh}\tau^{\alpha-1}A(\tau)u_N d\tau,\int_{0}^{h}\tau^{\alpha-1}A(\tau)u_1(\tau)d\tau,\ldots,\int_{(N-2)h}^{(N-1)h}\tau^{\alpha-1}A(\tau)u_{N-1}(\tau)d\tau\right)$$

Thus, to find the unknown pairs $(\lambda,u[t])$, the solution of problems (6)-(9), we have a closed system of equations (10) and (13). The solution of multipoint boundary value problems (6)-(9) is found as the limit of the sequence of pairs $(\lambda'^{(k)},u^{(k)}[t])$, $k=0,1,2,...$ determined by the following algorithm:

Step 0. a) Assuming that the $Q(h)$ matrix is invertible, we define the initial approximation from the $Q(h)\lambda=-F(h)$ equation using the $\lambda^{(0)}=(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},\ldots,\lambda_N^{(0)})\in R^{nN}$ parameter :

$$\lambda^{(0)}=-[Q(h)]^{-1}F(h).$$

b) Substituting the $\lambda_r^{(0)}$, $r=\overline{1,N}$ found in the right part of the system of integro-differential equations (6) and solving the Cauchy problem with conditions (7) we find the $u^{(0)}[t]=(u_1^{(0)}(t),u_2^{(0)}(t),\ldots,u_N^{(0)}(t))'$.

Step 1. a) Substituting the found $u_r^{(0)}(t)$, $r=\overline{1,N}$, in the right part (13) of the equation $[Q(h)]\lambda=-F(h)-G(u^{(0)},h)$, we define $\lambda^{(1)}=(\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\ldots\lambda_N^{(1)})$.

b) Substituting the found $\lambda_r^{(1)}$, , $r=\overline{1,N}$ in the right part of the system of integro-differential equations (6) and solving the Cauchy problem with conditions (7) we find $u^{(1)}[t]=(u_1^{(1)}(t),u_2^{(1)}(t),\ldots,u_N^{(1)}(t))'$., etc.

Continuing the process, by following the algorithm we find a system of pairs $(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t])$, $k=0,1,2,\ldots$

Based on the proposed algorithm for finding the solution, as well as theorem 1 of [11, page 53], it follows:

Theorem 1. *Let the* $Q(h)$ *matrix be invertible for some* $h>0:Nh=T$ *and the inequalities are satisfied:*

$$\|[Q(h)]^{-1}\|\le\gamma(h),\quad q(h)=\gamma(h)\max(1,\frac{h^\alpha}{\alpha}\|C\|)\left[\exp\left(\frac{ah^\alpha}{\alpha}\right)-1\right]<1.$$

Then the two-point boundary value problems (1) and (2) have a unique solution.

REFERENCES

1. R. Khalil,M. A. Horani, A. Yousef and M. Sababheh, A new definition of fractional derivative, *J. Comput. Appl. Math.* 264, 65–70 (2014).
2. E. Unal and A. Gokdogan, Solution of conformable fractional ordinary differential equations via differential transform method,*Optik* 128, 264–273 (2017).
3. M. S. Hashemi, Invariant subspaces admitted by fractional differential equations with conformable derivatives, *Chaos Solit. Fract.* 107, 161–169 (2018).
4. M. A. Hammad and R. Khalil, Abels formula and wronskian for conformable fractional differential equations, *Int. J. Differ. Equ. Appl.* 13(3), (2014).
5. O. S. Iyiola and E. R. Nwaeze, Some new results on the new conformable fractional calculus with application using dAlambert approach, *Progr. Fract. Differ. Appl.* 2(2), 115–122 (2016).
6. T. Abdeljawad, J. Alzabut and F. Jarad. A generalized Lyapunov-type inequality in the frame of conformable derivatives. *Adv. Differ. Equ.* 2017(1),321 (2017).
7. M. A. Refai and T. Abdeljawad, Fundamental results of conformable Sturm-Liouville eigenvalue problems, *Complexity* Article ID 3720471, 7 pages 2017.
8. M. A. L. Horani, M. A. Hammad and R. Khalil, Variation of parameters for local fractional nonhomogenous linear differential equations. *J. Math. Comput. Sci.* 16, 147–153 (2016).
9. Ndolane Sene, Solutions for some conformable differential equations, *Progr. Fract. Differ. Appl*. 4, No. 4, 493-501 (2018).
10. E. Unal, A. Gokdogan and I. Cumhur, The operator method for local fractional linear differential equations, Optics 131, 986–993 (2017).
11. Dzhumabaev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary value problem for systems of differential equations, *J. Comput. Math. and Math. Ph.* 29 (1) 50-66 (1989).

К. Назарова, Қ. Усманов, Л. Асылханова

Ерекшелігі бар дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есеп

Аңдатпа: Параметрлеу әдісімен ерекшеліктері бар дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық екі нүктелі шеттік есеп зерттеледі. Қарастырылып отырған мәселені шешудің қажетті шарттары белгіленді және олардың шешімін табу алгоритмі ұсынылды.

Түйінді сөздер: Шеттік есеп, дифференциалдық теңдеулер жүйесі, конформды туынды, конформды интеграл, параметрлеу әдісі

К. Назарова, К. Усманов, Л. Асылханова

О краевой задаче для систем дифференциальных уравнений с особенностями

Аннотация. Методом параметризации исследуется линейная двухточечная краевая задача для системы дифференциальных уравнений с особенностями. Установлены необходи-

мые условия существования решения рассматриваемой задачи и предложен алгоритм нахождения их решения.

Ключевые слова: краевые задачи, система дифференциальных уравнений, конформная производная, конформный интеграл, метод параметризации.

Сведения об авторах:

Назарова Кулзина Жаркимбековна, доцент кафедры математики, МКТУ имени Х.А. Ясави, (161200, Казахстан, г. Туркестан, пр. Б. Саттарханова, д. 29), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2093-1879.

Усманов Кайрат Идрисович, доцент кафедры математики, МКТУ имени Х.А. Ясави (161200, Казахстан, г. Туркестан, пр. Б. Саттарханова, д. 29), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1377-4633.

Л. Асылханова – магистрант МКТУ имени Х.А. Ясави

Information about the authors:

Kulzina Zh. Nazarova, Associate Professor of Mathematics, Akhmet Yassawi University (29 Sattarkhanov Av., Turkistan 161200, Kazakhstan), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2093-1879.

Kairat Id. Usmanov, Associate Professor of Mathematics, Akhmet Yassawi University (29 Sattarkhanov Av., Turkistan 161200, Kazakhstan), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID:http://orcid.org/0000-0002-2093-1879.

L.Asylkhanova, master student, Akhmet Yassawi University, Turkistan

UDC 517.9

Ospanov M.N.

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

ON ONE PROPERTY OF A SOLUTION OF A THIRD ORDER PSEUDOPARABOLIC EQUATION

Abstract. *Sufficient conditions for the boundedness of the highest derivative of a third-order partial differential equation are established and a coercive estimate is obtained in the norm of the space* $C_*(\overline{\Omega}, R)$.

Key words: *pseudoparabolic equation, diagonal dominance, coercive estimate.*

1. **Introduction.** Let $\overline{\Omega} = [0,\omega] \times (-\infty, +\infty)$. Consider the third-order pseudoparabolic equation

$$u_{xtt} = a_0(x,t)u_{xt} + a_1(x,t)u_x + a_2(x,t)u_t + a_3(x,t)u + f(x,t) \tag{1}$$

where the functions $a_i(x,t)\,(i=\overline{0,3})$, $f(x,t)$ are assumed to be continuous and, generally speaking, unbounded on $\overline{\Omega}$.

At present, studies of local and nonlocal boundary value problems for equation (1) are very actively studied and arouse great practical and theoretical interest due to the fact that applied problems of physics, mechanics, and biology are reduced to such equations.

Local and nonlocal boundary value problems for pseudoparabolic equations of the third order are investigated in the works of M.Kh. Shkhanukov. [1-4]. A.M.Nakhushev [5-8] pointed out examples of the practical application of the results of the study of boundary value problems for the equations under study in the study of moisture transfer processes in porous media and in problems of mathematical biology.

Nonlocal problems for pseudoparabolic equations of the third order were also considered in [9–11], where A.A. Samarskii investigated them by the method of passing from a problem with a nonclassical boundary condition to a problem with a classical condition, but for a nonclassical equation there is the so-called loaded equation [12].

In this paper, in contrast to the studies above, we consider the case of equation (1) with continuous and generally speaking unbounded coefficients given in an infinite domain. New problems arising due to the unboundedness of the coefficients of differential equations in the 1970s gave impetus to the creation of the theory of separability in the works of the English mathematicians Everitt and Geertz [13,14].The main task of the separability theory is to obtain nonlocal weighted estimates of the solution and its derivatives in the corresponding function spaces, called coercive estimates of the solution.Separability conditions for an ordinary differential operator of the second order in the space of continuous and bounded functions on the entire axis by the parametrization method were established in the works of D.S. Dzhumabaev and R.A. Medetbekova [15], D.S. Dzhumabaev [16] and M.M. Medetbekov [17]. The works of M. Otelbaev and A. Birgebaev [18], T.T. Amanova [19], M.B. Muratbekov and Zh.Zh. Aitkozha [20] are devoted to the establishment of coercive estimates for the solution of a singular differential equation of the third order. Multidimensional boundary value problems for them were systematically studied in the works of T.D. Dzhuraev [21] and others.

2. Ancillary results. We denote by $C_*(\overline{\Omega}, R)$ the space of bounded functions continuous with respect to $t \in R$ uniformly with respect to $t \in R$ and continuous with respect to $x \in [0,\omega]$. Let $\|V(x,\cdot)\|_1 = \sup\limits_{t\in R}\|V(x,t)\|$, where $\|V(x,t)\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}}|V_i(x,t)|$.

The properties of the solution $u(x,t)$ to equation (1), satisfy the conditions

$$u(0,t)=\psi(t),\ \ u(x,t), u_x(x,t), u_t(x,t), u_{xt}(x,t) \in C_*(\overline{\Omega}, R) \tag{2}$$

We put $P_{\alpha,\beta}(x,t) = \dfrac{\alpha(x,t)}{\sqrt{\beta(x,t)}}$, $\theta(x,t) = \dfrac{1}{d}\displaystyle\int_t^{t+d} a_1(x,\tau)d\tau.$

The following result was established in [22].

Theorem 1. Let the functions $a_i(x,t)$ $(i=\overline{0,3})$ of equation (1) be continuous on $\overline{\Omega}$, $\psi, \dot{\psi}, \ddot{\psi}$ continuous and bounded on R and the following conditions are satisfied:

a) $a_1(x,t) \geq \gamma > 0$, γ is constant;

b) $\dfrac{a_1(x,t)}{a_1(x,\bar{t})} \leq c$ at $t, \bar{t} \in R: |t-\bar{t}| < d$, c, d is constant;

c) for each $\varepsilon > 0$ there is $\delta > 0$, a number such that the inequality $\left|\dfrac{a_1(x',t) - a_1(x'',t)}{a_1(x'',t)}\right| < \varepsilon$ holds for all t from R and $x', x'' \in [0,\omega]: |x' - x''| < \delta.$

d) $P_{a_0,a_1}(x,t) \leq K$, $P_{a_2,a_1}(x,t), P_{a_3,a_1}(x,t), P_{f,a_1}(x,t) \in C_*(\overline{\Omega}, R)$.

Then there is a unique solution $u(x,t)$ to problems (1) and (2) and the following estimate is valid:

$$\max\left\{\|u(x,\cdot)\|_1, \|u_x(x,\cdot)\|_1, \|u_t(x,\cdot)\|_1, \|u_{xt}(x,\cdot)\|_1\right\} \leq \widetilde{C}$$

where $\widetilde{C} - const$, depending only on the norms of functions f, ψ, of constants $\gamma, K, c, d, \varepsilon$.

3. Main result. When the coefficients of equation (1) are not bounded, this theorem cannot guarantee the boundedness of the derivative $u_{xtt}(x,t)$. The purpose of this work is to find conditions for belonging $u_{xtt}(x,t)$ to a space $C_*(\overline{\Omega}, R)$ and obtain an estimate for $\|u_{xtt}(x,\cdot)\|_1$.

Theorem 2.

Let the assumptions of Theorem 1 and be satisfied $f(x,t), \sqrt{\theta(x,t)}\psi(t), \sqrt{\theta(x,t)}\dot{\psi}(t) \in C_*(\overline{\Omega}, R^2)$.

Then there is a unique solution $u(x,t)$ to problems (1) and (2), moreover $u_{xtt} \in C_*(\overline{\Omega}, R)$ and the estimate

$$\|u_{xtt}\|_1 + \|a_0 u_{xt}\|_1 + \|a_1 u_x\|_1 + \|a_2 u_t\|_1 + \|a_3 u\|_1 \le C. \tag{3}$$

Here C depends on the norms of functions f, ψ, of constants $\gamma, K, c, d, \varepsilon$.

Proof. We introduce new functions $u_1(x,t)$ and $u_2(x,t)$

$$u_1(x,t) = u(x,t), \quad u_2(x,t) = u_t(x,t) \tag{3}$$

and put $U(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t)), \quad V(x,t) = U_x(x,t)$.

Then problem (1), (2) is reduced to the following problem

$$V_t(x,t) = A(x,t)V + C(x,t)U(x,t) + F(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega}, \; V(x,t) \in C_*(\overline{\Omega}, R^2), \tag{4}$$

$$U(x,t) = \Psi(t) + \int_0^x V(\xi,t)d\xi, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}, \tag{5}$$

where

$$A(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1(x,t) & a_0(x,t) \end{pmatrix}, \quad C(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_3(x,t) & a_2(x,t) \end{pmatrix},$$

$$F(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x,t) \end{pmatrix}, \quad \Psi(t) = \begin{pmatrix} \psi(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{pmatrix}.$$

If the vector function $U(x,t)$ is known, then solving problem (4) we find $V(x,t)$. If $V(x,t)$ known, then from (5) we find $U(x,t)$. Then $u(x,t) = u_1(x,t)$ is a solution to problem (1), (2).

To find a solution to problem (4), (5), we use the method of successive approximations.

We take the function $U(x,t)$ as the zero approximation $\Psi(t)$, and find the function $V^{(0)}(x,t) = (v_1^{(0)}(x,t), v_2^{(0)}(x,t))$ as a solution to the problem

$$V_t^{(0)}(x,t) = A(x,t)V^{(0)} + C(x,t)\Psi(t) + F(x,t), \quad V^{(0)}(x,t) \in C_*(\overline{\Omega}, R^2). \tag{6}$$

$U^{(0)}(x,t)$ we find from the relation

$$U^{(0)}(x,t) = \Psi(t) + \int_0^x V^{(0)}(\xi,t)d\xi. \tag{7}$$

By the equalities

$$v_1^{(0)}(x,t) = \tilde{v}_1^{(0)}(x,t) + \tilde{v}_2^{(0)}(x,t), \quad v_2^{(0)}(x,t) = K\sqrt{\theta(x,t)}(\tilde{v}_1^{(0)}(x,t) - \tilde{v}_2^{(0)}(x,t)), \tag{8}$$

we introduce new unknown functions $\tilde{v}_1^{(0)}(x,t), \tilde{v}_2^{(0)}(x,t)$. As $\theta(x,t) \ge \gamma > 0$, since transformation (8) is reversible and

$$\tilde{v}_1^{(0)}(x,t) = \frac{1}{2}\left[v_1^{(0)}(x,t) + \frac{v_2^{(0)}(x,t)}{K\sqrt{\theta(x,t)}}\right], \quad \tilde{v}_2^{(0)}(x,t) = \frac{1}{2}\left[v_1^{(0)}(x,t) - \frac{v_2^{(0)}(x,t)}{K\sqrt{\theta(x,t)}}\right].$$

As a result, (6) is reduced $\tilde{V}^{(0)}(x,t) = (\tilde{v}_1^{(0)}(x,t), \tilde{v}_2^{(0)}(x,t))$ to the problem

$$\tilde{V}_t^{(0)}(x,t) = \tilde{A}(x,t)\tilde{V}^{(0)} + \tilde{C}(x,t)\Psi(t) + \tilde{F}(x,t), \quad \tilde{V}^{(0)}(x,t) \in C_*(\overline{\Omega}, R^2). \tag{9}$$

Here $\tilde{A}(x,t) = (\tilde{a}_{ij}(x,t))_{i,j=1}^2, \qquad \tilde{C}(x,t) = (\tilde{c}_{i,j}(x,t))_{i,j=1}^2,$

$$\tilde{a}_{11}(x,t) = \frac{1}{2}\left[K\sqrt{\theta(x,t)} + \frac{a_1(x,t)}{K\sqrt{\theta(x,t)}} + a_0(x,t) - \frac{\theta_t(x,t)}{2\theta(x,t)}\right],$$

$$\tilde{a}_{12}(x,t) = -\frac{1}{2}\left[K\sqrt{\theta(x,t)} + \frac{a_1(x,t)}{K\sqrt{\theta(x,t)}} - a_0(x,t) + \frac{\theta_t(x,t)}{2\theta(x,t)}\right],$$

$$\tilde{a}_{21}(x,t)=\frac{1}{2}\left[K\sqrt{\theta(x,t)}-\frac{a_1(x,t)}{K\sqrt{\theta(x,t)}}-a_0(x,t)+\frac{\theta_t(x,t)}{2\theta(x,t)}\right],$$

$$\tilde{a}_{22}(x,t)=-\frac{1}{2}\left[K\sqrt{\theta(x,t)}-\frac{a_1(x,t)}{K\sqrt{\theta(x,t)}}+a_0(x,t)-\frac{\theta_t(x,t)}{2\theta(x,t)}\right],$$

$$\tilde{c}_{1j}(x,t)=\frac{1}{2}\left[\frac{a_2(x,t)}{K\sqrt{\theta(x,t)}}+\frac{a_3(x,t)}{K\sqrt{\theta(x,t)}}\right]\ (j=1,2),$$

$$\tilde{c}_{2j}(x,t)=-\frac{1}{2}\left[\frac{a_2(x,t)}{K\sqrt{\theta(x,t)}}-\frac{a_3(x,t)}{K\sqrt{\theta(x,t)}}\right]\ (j=1,2),\quad \tilde{F}(x,t)=\begin{pmatrix}\dfrac{f(x,t)}{2K\sqrt{\theta(x,t)}}\\ -\dfrac{f(x,t)}{2K\sqrt{\theta(x,t)}}\end{pmatrix}.$$

Note that all conditions of Theorem 1 are fulfilled.From the condition $b)$ and $b)$ after simple transformations it follows,

$$\frac{a_1(x,t)}{\theta(x,t)}\in C_*(\overline{\Omega},R) \tag{10}$$

which implies, taking $d)$ into account that the function $\tilde{C}(x,t)\Psi(t)+\tilde{F}(x,t)$ belongs to the space $C_*(\overline{\Omega},R^2)$.

Then it follows from (9) by Theorem 4 [23] that the function $\eta(x,t)=K\sqrt{\theta(x,t)}\tilde{V}^{(0)}(x,t)$ will also belong to $C_*(\overline{\Omega},R^2)$.

The function $\eta(x,t)$ satisfies the equation

$$\eta_t(x,t)=\tilde{A}(x,t)\eta+K\sqrt{\theta(x,t)}\tilde{C}(x,t)\Psi(t)+K\sqrt{\theta(x,t)}\tilde{F}(x,t)+\frac{K[a_1(x,t+d)-a_1(x,t)]}{2d\sqrt{\theta(x,t)}}\tilde{V}^{(0)}(x,t). \tag{11}$$

From (10) and the conditions of the theorem, we obtain that the function

$$K\sqrt{\theta(x,t)}\tilde{C}(x,t)\Psi(t)+K\sqrt{\theta(x,t)}\tilde{F}(x,t)+\frac{K[a_1(x,t+d)-a_1(x,t)]}{2d\sqrt{\theta(x,t)}}\tilde{V}^{(0)}(x,t) \tag{12}$$

belongs to space $C_*(\overline{\Omega},R^2)$. Then from (11) by Theorem 4 from [23] it follows

$$W^{(0)}(x,t)=\sqrt{\theta(x,t)}\eta(x,t)=K\theta(x,t)\tilde{V}^{(0)}(x,t)\in C_*(\overline{\Omega},R^2).$$

Taking into account (11), the function $W^{(0)}(x,t)$ satisfies the equation

$W_t^{(0)}(x,t)=\tilde{A}(x,t)W+K\tilde{C}(x,t)\theta(x,t)\Psi(t)+K\theta(x,t)\tilde{F}(x,t)+K\theta_t(x,t)\tilde{V}^{(0)}(x,t)$. Under the conditions of the theorem, the matrix $\tilde{A}(x,t)=(\tilde{a}_{ij}(x,t))_{i,j=1}^{2}$ has a diagonal dominance in rows with the function $\tilde{\theta}(x,t)=\dfrac{a_1(x,t)}{K\sqrt{\theta(x,t)}}$, i.e.

$$|a_{ii}(x,t)|\geq\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2}|a_{ij}(x,t)|+\tilde{\theta}(x,t),\quad i=1,2,$$

where $\tilde{\theta}(x,t)\geq\theta_0>0-$ is a $\overline{\Omega}$ continuous function, $\theta_0-const$.

Taking into account the conditions of the theorem, it is easy to prove that the ratio of the sum of the last three terms on the right-hand side of (12) to the value of the diagonal dominance $\tilde{\theta}(x,t)$ belongs to $C_*(\overline{\Omega},R^2)$.

Then the results of [36] imply the existence of a unique solution $W^{(0)}(x,t)=(w_1^{(0)}(x,t),w_2^{(0)}(x,t))\in C_*(\overline{\Omega},R^2)$ to (12) and the inequality

$$\left\|W^{(0)}(x,\cdot)\right\|_1\leq C_1. \tag{13}$$

C_1 depends on the norms of the functions f, ψ, of constants $\gamma, K, c, d, \varepsilon$.

By virtue of (8), the coordinates $v_i^{(0)}(x,t),\ i=1,2$ of the vector $V^{(0)}(x,t)$ are represented by the formulas

$$v_1^{(0)}(x,t)=\frac{1}{K\theta(x,t)}[w_1^{(0)}(x,t)+w_2^{(0)}(x,t)],v_2^{(0)}(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\theta(x,t)}}[w_1^{(0)}(x,t)-w_2^{(0)}(x,t)]. \tag{14}$$

Since $W^{(0)}(x,t)\in C_*(\overline{\Omega},R^2)$, taking into account (10), we have $a_1(x,t)v_1^{(0)}(x,t),\ a_0(x,t)v_2^{(0)}(x,t))\in C_*(\overline{\Omega},R^2)$. Using the conditions $b),\ d)$ of Theorem 1 and inequality (13), we obtain the estimates

$$\left\|a_1(x,\cdot)v_1^{(0)}(x,\cdot)\right\|_1\le c_1,\quad \left\|a_0(x,t)v_2^{(0)}(x,t)\right\|_1\le c_2. \tag{15}$$

Here $c_1,\ c_2$ are constants that depend only on the norms of the functions f, ψ, of constants $\gamma, K, c, d, \varepsilon$.

Substituting (14) into relation (7), we find a function $U^{(0)}(x,t)=(u_1^{(0)}(x,t),u_2^{(0)}(x,t))$, its belonging to the space $C_*(\overline{\Omega},R^2)$ is ensured by

Theorem 1. For functions $a_3(x,t)u_1^{(0)}(x,t),\ a_2(x,t)u_2^{(0)}(x,t)$, the following relations hold:

$$a_3(x,t)u_1^{(0)}(x,t)=a_3(x,t)\psi(t)+\int_0^x a_3(x,t)\frac{w_1^{(0)}(\xi,t)+w_2^{(0)}(\xi,t)}{K\theta(\xi,t)}d\xi,$$

$$a_2(x,t)u_2^{(0)}(x,t)=a_2(x,t)\dot{\psi}(t)+\int_0^x a_2(x,t)\frac{w_1^{(0)}(\xi,t)-w_2^{(0)}(\xi,t)}{K\theta(\xi,t)}d\xi. \tag{16}$$

Dividing the segment $[0,\omega]$ into parts of the same length $\frac{\delta}{2}$, less in view of the condition $c)$ of Theorem 1, we have $\sup\limits_{x_1,x_2\in[0,\omega]}\frac{a_1(x_1,t)}{a_1(x_2,t)}\le(1+\varepsilon)^{\frac{4\omega}{\delta}}=\gamma_0$. From this and from the notation $\theta(x,t)$ it follows that the expression is finite $\sup\limits_{x_1,x_2\in[0,\omega]}\frac{\theta(x_2,t)}{\theta(x_1,t)}$.

Therefore, according to the conditions of the theorem, the functions

$$a_3(x,t)\psi(t)\equiv\frac{a_3(x,t)}{\sqrt{a_1(x,t)}}\cdot\frac{\sqrt{a_1(x,t)}}{\sqrt{\theta(x,t)}}\cdot\sqrt{\theta(x,t)}\psi(t) \text{ and}$$

$$\frac{a_3(x,t)}{K\theta(\xi,t)}\equiv\frac{a_3(x,t)}{K\sqrt{a_1(x,t)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_1(x,t)}}\cdot\frac{a_1(x,t)}{\theta(x,t)}\cdot\frac{\theta(x,t)}{\theta(\xi,t)},\ \xi\in[0,\omega],$$

belong to space $C_*(\overline{\Omega},R^2)$. Then from (16) we have $a_3(x,t)u_1^{(0)}(x,t)\in C_*(\overline{\Omega},R^2)$.

In the same way one can show that $a_2(x,t)u_2^{(0)}(x,t)\in C_*(\overline{\Omega},R^2)$. Using them and (13), from (16) we obtain the validity of the inequalities: $\left\|a_3(x,\cdot)u_1^{(0)}(x,\cdot)\right\|_1\le c_3$, $\left\|a_2(x,\cdot)u_2^{(0)}(x,\cdot)\right\|_1\le c_4$. Here $c_3,\ c_4$ are constants that depend only on the norms of the functions f, ψ, of constants $\gamma, K, c, d, \varepsilon$.

We put $W^{(k)}(x,t)=K\theta(x,t)\tilde{V}^{(k)}(x,t)\left(k=1,2,...\right)$, which is the $\tilde{V}^{(k)}-k-$ approximation of problems (4) and (5).The fact that functions $W^{(k)}(x,t)\left(k=1,2,...\right)$ belong to a space $C_*(\overline{\Omega},R^2)$ is proved similarly to the case $k=0$, based on the results of [36]. The function $W^{(k)}(x,t)\left(k=1,2,...\right)$ satisfies the system $W_t^{(k)}(x,t)=\tilde{A}(x,t)W+K\tilde{C}(x,t)\theta(x,t)U^{(k-1)}(x,t)+$ $+K\theta(x,t)\tilde{F}(x,t)+K\theta_t(x,t)\tilde{V}^{(k)}(x,t)$. Using the same approach as used for $k=0$, the belonging of functions $a_1(x,t)v_1^{(k)}(x,t)$, $a_0(x,t)v_2^{(k)}(x,t)$, $a_3(x,t)u_1^{(k)}(x,t)$ and $a_2(x,t)u_2^{(k)}(x,t)$ space $C_*(\overline{\Omega},R^2)$ are established.

The sequence $\{W^{(k)}(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ converges in the norm of the space $C_*(\overline{\Omega},R^2)$ to the function $W^{(*)}(x,t)$, which is proved in the same way as in Theorem 1. Therefore, representations similar to (16) for sequences $\{a_1(x,t)v_1^{(k)}(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{a_0(x,t)v_2^{(k)}(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{a_3(x,t)u_1^{(k)}(x,t)\}$, $\{a_2(x,t)u_2^{(k)}(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ imply their convergence to functions $a_1(x,t)v_1^{(*)}(x,t)$, $a_0(x,t)v_2^{(*)}(x,t)$, $a_3(x,t)u_1^{(*)}(x,t)$, $a_2(x,t)u_2^{(*)}(x,t)$, respectively, and for the $W^{(*)}(x,t)$ inequality holds:

$$\left\|W^{(*)}(x,\cdot)\right\|_1 \leq C_2\,. \tag{17}$$

C_2 depends on the norms of the functions $f,\psi,$ of constants γ,K,c,d,ε.

The function $(v_1^{(*)}(x,t),v_2^{(*)}(x,t))-$ is the solution to problem (4), and $(u_1^{(*)}(x,t),u_2^{(*)}(x,t))$ through them is determined by (5).Hence, taking into account the replacements made by us, we have $u_{xtt}\in C_*(\overline{\Omega},R)$ .Using (17), we establish the boundedness of the norms $\left\|a_1(x,\cdot)v_1^{(*)}(x,\cdot)\right\|_1$, $\left\|a_0(x,\cdot)v_2^{(*)}(x,\cdot)\right\|_1$, $\left\|a_3(x,\cdot)u_1^{(*)}(x,\cdot)\right\|_1$, $\left\|a_2(x,t)u_2^{(*)}(x,t)\right\|_1$.

The coercive estimate (*) follows from this and equation (1).The theorem is proved.

This work was supported by project AR05131649 of the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan.

REFERENCES

1. Shhanukov M.H. Issledovanie kraevyh zadach dlja odnogo klassa uravnenij tret'ego porjadka metodom funkcii Rimana, Soobshhenija AN SSSR, 1983.
2. Shhanukov M.H. O nekotoryh kraevyh zadachah dlja uravnenija tret'ego porjadka i jekstremal'nyh svojstvah ego reshenij, DU 19(1) pp. 145-152 (1983).
3. Shhanukov M.H. O nekotoryh kraevyh zadachah dlja uravnenija tret'ego porjadka, voznikajushhih pri modelirovanii fil'tracii zhidkosti v poristyh sredah, DU, 18(4) pp. 689-699 (1982).
4. Shhanukov M.H. Ob odnom metode reshenija kraevyh zadach dlja uravnenii tret'ego porjadka, DAN SSSR, 265(6) pp.1327-1330 (1982).
5. Nahushev A.M. Nelokal'naja zadacha i zadacha Gursa dlja nagruzhennogo uravnenija giperbolicheskogo tipa i ih prilozhenija k prognozu pochvennoj vlagi, DAN SSSR 242(5) pp. 1008-1011 (1978).
6. Nahushev A.M. Kraevye zadachi dlja nagruzhennyh integro- differencial'nyh uravnenij giperbolicheskogo tipa i nekotorye ih prilozhenija k prognozu pochvennoj vlagi, DU 15(1) pp. 96-105 (1979).
7. Nahushev A.M. Ob nekotoryh sposobah identifikacii matematicheskoj modeli dinamiki gruntovoj vody i pochvennoj vlagi, Sbornik nauchnyh trudov "SAPR i ASPR v Melioracii", Nal'chik KBGU pp. 3-20 (1983).
8. Nahushev A.M. Uravnenija matematicheskoj biologii, Vysshaja shkola, Moscow, 1995.
9. Soldatov A.P., Shhanukov M.H. Kraevye zadachi s obshhim nelokal'nym usloviem A.A. Samarskogo dlja psevdoparabolicheskih uravnenii vysokogo porjadka, DAN SSSR, 297(3), pp. 547-551 (1987).
10. Kozhanov A.I. Ob odnoj nelokal'noj kraevoj zadache s peremennymi kojefficientami dlja uravnenij teploprovodnosti i Allera, DU, 40, pp. 763-774 (2004).
11. Kozhanov A.I., Popov N.S. O razreshimosti nekotoryh zadach so smeshheniem dlja psevdoparabolicheskih uravnenii, Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Matematika, mehanika, informatika, 10(3) pp. 46-62 (2010).

12. Dzhenaliev M.T. K teorii linejnyh kraevyh zadach dlja nagruzhennyh differencial'nyh uravnenii, Almaty. In-t. teor. i prik. mat., 1995.
13. Everitt W.N., Giertz M. Some properties of the domains of certain differential operators, Proc.London Math.Soc.-23(3), pp.301-324 (1971).
14. Everitt W.N., Giertz M. Some inequalities associated with certain differential equations, Math.Z., 126, pp.308-326 (1972).
15. Dzhumabaev D.S, Medetbekova R.A. O razdelimosti linejnogo differencial'nogo operatora vtorogo porjadka, Izvestija AN KazSSR. Serija fiz.-mat., 5, pp. 21-26 (1983).
16. Dzhumabaev D.S. Singuljarnye kraevye zadachi i ih approksimacija dlja obyknovennyh differencial'nyh uravnenij. Avtoref.diss. dokt.fiz.-mat.nauk, Kiev, 1994.
17. Medetbekov M.M. O svojstvah reshenija obyknovennogo differencial'nogo uravnenija vtorogo porjadka, Izvestija AN KazSSR. Serija fiz.-mat., 1, pp. 32-36 (1986).
18. Birgebaev A., Otelbaev M. O razdelimosti nelinejnogo differencial'nogo operatora 3-go porjadka, Izvestija AN KazSSR. Serija fiz.-mat., 3, pp.11-13 (1984).
19. Amanova T.T. Gladkost' i approksimativnye svojstva reshenij dvuchlennyh differencial'nyh uravnenij na beskonechnom intervale. Avtoref.dis. kand. fiz.-mat.nauk. Almaty, 1994.
20. Ajtkuzhin Zh.Zh., Muratbekov M.B. O gladkosti reshenij nelinejnogo differencial'nogo uravnenija ne chetnogo porjadka, Tez.dokl.mezhd.konf. «Probl. Nauki i teh.», Karaganda, pp.103-108 (2001).
21. Dzhuraev T.D. Kraevye zadachi dlja uravnenija smeshannogo i smeshanno-sostavnogo tipov, Tashkent. Fan, 1986.
22. Dzhumabaev D.S., Ospanov M.N. Ob ogranichennosti na polose reshenija i ego proizvodnyh sistemy giperbolicheskih uravnenij s neogranichennymi kojefficientami, Matematicheskij zhurnal, Almaty, 1(19) pp. 61-66 (2006).
23. Ospanov M.N. Razdelimost' semejstva sistem obyknovennyh differencial'nyh uravnenij i ih prilozhenija, Vestnik Karagandinskogo universiteta, 4(52) pp. 89-94 (2008).

Оспанов М.Н.

Үшінші ретті псевдопараболалық теңдеу шешімінің бір қасиеті туралы

Аңдатпа: Үшінші ретті дербес дифференциалдық теңдеудің ең жоғары туындысының шектелуі үшін жеткілікті жағдайлар белгіленіп, $C_*(\overline{\Omega}, R)$ кеңістігі нормасында коэрцитивті бағасы алынды.

Түйінді сөздер: Псевдопараболалық теңдеулер, диагональдық басымдылық, коэрцитивті баға

Оспанов М.Н.

Об одном свойстве решения псевдопараболического уравнения третьего порядка

Аннотация. Установлены достаточные условия ограниченности старшей производной уравнения с частными производными третьего порядка и получена коэрцитивная оценка в норме пространства $C_*(\overline{\Omega}, R)$.

Ключевые слова: псевдопараболические уравнения, диагональное преобладание, коэрцитивная оценка

Сведения об авторе:

Оспанов Мырзагали Наурызханович, к.ф.-м.н., доцент кафедры «Высшая математика» Евразийского Национального университета им. Л.Н. Гумилева.

About authors: Myrzagali N. Ospanov, cand. of ph.-math. sci., associate Professor of the Department of Higher Mathematics, L.N. Gumilyov Eurasian National University.

UDC 517.927.4, 519.62

S.M. Temesheva
Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
Institute of mathematics and mathematical modelling, Almaty, Kazakhstan

A MODIFICATION OF ALGORITHMS OF THE DZHUMABAEV PARAMETERIZATION METHOD AND A NUMERICAL METHOD

***Abstract**. The article deals with a modification of the algorithms of D. S. Dzhumabaev's parametrization method. Additional parameters are introduced at the internal partition points and at both ends of the interval. Sufficient conditions for convergence of these algorithms in terms of input data are given. Using the right-hand part of the system of differential equations and the boundary condition function, a nonlinear operator equation was constructed to find initial approximations of unknown parameters. A numerical method is proposed for finding a solution to a nonlinear two-point boundary value problem for a system of ordinary differential equations. The numerical method was implemented in a test example.*

***Key words**: nonlinear two-point boundary value problem, the Dzhumabaev parametrization method, sufficient conditions, an isolated solution, numerical method.*

In Memory of Professor Dulat S. Dzhumabaev

We consider a nonlinear two-point boundary value problem for a system of ordinary differential equations

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad t \in [0,T], \quad x \in R^n, \tag{1}$$

$$g(x(0), x(T)) = 0, \tag{2}$$

where $f:[0,T]\times R^n \to R^n$ and $g: R^n \times R^n \to R^n$ are continuous and $\|x\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i|$.

By $C([0,T],R^n)$ we denote a space of continuous functions $x:[0,T]\to R^n$ with norm $\|x\|_1$ = $\max\limits_{t\in[0,T]} \|x(t)\|$.

Problems of solvability and construction of approximate methods for the solution of problems (1) and (2) are studied in numerous papers [1-11]. For the bibliography and detailed analysis of the works dealing with the main groups of methods aimed at the investigation and solution of boundary-value problems, see [11].

The main goal of the work is using one modification of the algorithms of the Dzhumabaev parametrization method [12-14], to establish sufficient conditions for the existence of an isolated solution of boundary value problems (1) and (2), and to propose a numerical method for solving boundary value problems (1) and (2).

For the chosen points $\Delta_N : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T$, where $N = 1,2,\ldots$, we perform the partition $[0,T) = \bigcup_{r=1}^{N} [t_{r-1}, t_r)$. Denote by $x_r(t)$ the function $x(t)$ restricted to the r th interval $[t_{r-1}, t_r)$. By $C([0,T],\Delta_N,R^{nN})$ we denote a space of the systems of functions $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t))$, where $x_r : [t_{r-1}, t_r) \to R^n$ are continuous and have finite left limits $\lim_{t\to t_r - 0} x_r(t)$ for all $r = \overline{1,N}$ with the norm $\|x[\cdot]\|_2 = \max\limits_{r=\overline{1,N}} \sup\limits_{t\in[t_{r-1},t_r)} \|x_r(t)\|$. It is clear that $C([0,T],\Delta_N,R^{nN})$ is a complete space.

Denote by λ_r the value of $x_r(t)$ at $t = t_{r-1}$ $(r = \overline{1,N})$ and λ_{N+1} the limit $\lim_{t \to t_N} x_N(t)$. Here in contrast to the classical parameterization method the parameter is also entered at the point $t = T$, so we will use notations $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N, \lambda_{N+1}) \in R^{n(N+1)}$ and $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N) \in R^{nN}$. We change the variable according to $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$ on each interval $[t_{r-1}, t_r)$. Then, we obtain the boundary value problem with parameters

$$\frac{du_r}{dt} = f\left(t, u_r + \lambda_r\right), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1,N}, \tag{3}$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \qquad r = \overline{1,N}, \tag{4}$$

$$g\left(\lambda_1, \lambda_{N+1}\right) = 0, \tag{5}$$

$$\lambda_r + \lim_{t \to t_r - 0} u_r(t) - \lambda_{r+1} = 0, \quad r = \overline{1,N}. \tag{6}$$

Let $x(t)$ be a solution to problems (1) and (2). Then, the system of pairs ($\lambda_r = x_r(t_{r-1})$, $u_r(t) = x_r(t) - x_r(t_{r-1})$), $r = \overline{1,N}$, is a solution to problems (3)-(6) (here, $x_r(t)$ is a restriction of $x(t)$ on $[t_{r-1}, t_r)$). Conversely, if $\left(\tilde{\lambda}_r, \tilde{u}_r(t)\right), r = \overline{1,N}$, is a solution to (3)-(6), then the function $\tilde{x}(t)$ defined by the equalities $\tilde{x}(t) = \begin{cases} \tilde{\lambda}_r + \tilde{u}_r(t), & for\ t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1,N}, \\ \tilde{\lambda}_{N+1}, & for\ t = t_N, \end{cases}$ is a solution to problems (1) and (2). What makes the parametric problem advantageous over (3)-(6) is the presence of the initial conditions $u_r(t_{r-1}) = 0$, $r = \overline{1,N}$. For a fixed λ_r, Cauchy problems (3) and (4) are equivalent to the Volterra nonlinear integral equation

$$u_r(t) = \int_{t_{r-1}}^{t} f\left(\tau, \lambda_r + u_r(\tau)\right) d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1,N}. \tag{7}$$

Replace $u_r(\tau)$ on the right-hand side of (7) by its integral representation. Then, $u_r(t)$ can be written as

$$u_r(t) = \int_{t_{r-1}}^{t} f\left(\tau_1, \lambda_r + \int_{t_{r-1}}^{\tau_1} f\left(\tau_2, \lambda_r + u_r(\tau_2)\right) d\tau_2\right) d\tau_1, \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1,N}.$$

From this relation, we find $\lim_{t \to t_r - 0} u_r(t)$ $(r = \overline{1,N})$. Substituting these values into (5) and (6), we obtain the following system of nonlinear equations for $\lambda_r \in R^n$:

$$g\left(\lambda_1, \lambda_{N+1}\right) = 0,$$

$$\lambda_r + \int_{t_{r-1}}^{t_r} f\left(\tau_1, \lambda_r + \int_{t_{r-1}}^{\tau_1} f\left(\tau_2, \lambda_r + u_r(\tau_2)\right) d\tau_2\right) d\tau_1 - \lambda_{r+1} = 0, \quad r = \overline{1,N}.$$

We write this system in the form

$$Q_{2,\Delta_N}(\Lambda, u) = 0, \quad \Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N, \lambda_{N+1}) \in R^{n(N+1)}. \tag{8}$$

Condition A. *There exists* Δ_N *such that the system of nonlinear equations* $Q_{2,\Delta_N}(\Lambda, 0) = 0$ *has a solution* $\Lambda^{(0)} = \left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_N^{(0)}, \lambda_{N+1}^{(0)}\right) \in R^{n(N+1)}$, *for* $\lambda^{(0)} = \left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_N^{(0)}\right) \in R^{nN}$ *the Cauchy problem*

$$\frac{du_r}{dt} = f\left(t, \lambda_r^{(0)} + u_r\right), \quad u_r(t_{r-1}) = 0, \quad t \in [t_{r-1}, t_r),$$

has a solution $u_r^{(0)}(t)$ *for all* $r = \overline{1,N}$, *and the system of functions is such that*

$$u^{(0)}[t] = \left(u_1^{(0)}(t), u_2^{(0)}(t), \ldots, u_N^{(0)}(t)\right) \in C\left([0,T], \Delta_N, R^{nN}\right).$$

We define the function $x^{(0)}(t)$ as follows:

$$x^{(0)}(t) = \begin{cases} \lambda_r^{(0)} + u_r^{(0)}(t), & for\ t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1,N}, \\ \lambda_{N+1}^{(0)}, & for\ t = t_N. \end{cases}$$

We take the numbers $\rho_\lambda > 0, \rho_u > 0$, and $\rho_x > 0$ and compose the sets

$$S\left(\Lambda^{(0)},\rho_\lambda\right)=\left\{\Lambda\in R^{n(N+1)}:\left\|\Lambda-\Lambda^{(0)}\right\|=\max_{r=\overline{1,N+1}}\left\|\lambda_r-\lambda_r^{(0)}\right\|<\rho_\lambda\right\},$$

$$S\left(\lambda^{(0)},\rho_\lambda\right)=\left\{\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_N)\in R^{nN}:\left\|\lambda-\lambda^{(0)}\right\|=\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r-\lambda_r^{(0)}\right\|<\rho_\lambda\right\},$$

$$S\left(u^{(0)}[t],\rho_u\right)=\left\{u[t]\in C\left([0,T],\Delta_N,R^{nN}\right):\left\|u[\cdot]-u^{(0)}[\cdot]\right\|_2<\rho_u\right\},$$

$$G_1^0(\rho_x)=\left\{(t,x):t\in[0,T],\left\|x-x^{(0)}(t)\right\|<\rho_x\right\},$$

$$G_2^0(\rho_\lambda,\rho_x)=\left\{(v,w)\in R^{2n}:\left\|v-\lambda_1^{(0)}\right\|<\rho_\lambda,\left\|w-\lambda_{N+1}^{(0)}\right\|<\rho_x\right\}.$$

Condition B**.** *The functions f and g have uniformly continuous partial derivatives f_x' in $G_1^0(\rho_x)$, and g_v' in $G_2^0(\rho_\lambda,\rho_x)$, and g_w' in $G_2^0(\rho_\lambda,\rho_x)$, and the following inequalities are true:*

$$\left\|f_x'(t,x)\right\|\le L,\quad \left\|g_v'(v,w)\right\|\le L_1,\quad \left\|g_w'(v,w)\right\|\le L_2,$$

where L and L_1 and L_2 are constants.

Let Condition A be met. We take the system of pairs $\left(\lambda_r^{(0)},u_r^{(0)}(t)\right)$, $r=\overline{1,N}$. Let's define the sequence of pairs $\left(\lambda_r^{(k)},u_r^{(k)}(t)\right)$, $r=\overline{1,N}$, by the following algorithm.

Step 1. (a) Determine the parameter $\Lambda^{(1)}=\left(\lambda_1^{(1)},\ldots,\lambda_N^{(1)},\lambda_{N+1}^{(1)}\right)\in R^{n(N+1)}$ from Eq. (8) with $u=u^{(0)}$; (b) Find $u_r^{(1)}(t)$, $t\in[t_{r-1},t_r)$, solving Cauchy problems (3) and (4) with $\lambda_r=\lambda_r^{(1)}$, $r=\overline{1,N}$.

Step 2. (a) Replacing u by the calculated function $u^{(1)}$ and solving Eq. (8), determine $\Lambda^{(2)}\in R^{n(N+1)}$; (b) Find $u_r^{(2)}(t)$, $t\in[t_{r-1},t_r)$, solving Cauchy problems (3) and (4) with $\lambda_r=\lambda_r^{(2)}$, $r=\overline{1,N}$.

Continuing this process, at the k th step of the algorithm, we obtain the system of pairs $\left(\lambda_r^{(k)},u_r^{(k)}(t)\right)$, $r=\overline{1,N}$. Using $\left(\lambda_r^{(k)},u_r^{(k)}(t)\right)$, $r=\overline{1,N}$, form the pair $\left(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t]\right)$, where $\lambda^{(k)}=\left(\lambda_1^{(k)},\ldots,\lambda_N^{(k)}\right)$ and $u^{(k)}[t]=\left(u_1^{(k)}(t),\ldots,u_N^{(k)}(t)\right)$.

The algorithms of the parameterization method open up the prospect for further development of constructive methods that allow simultaneous investigation of the existence and construction of solutions to boundary value problems for differential equations.

Theorem. 1*Assume that there exist Δ_N, $\rho_\lambda>0$, $\rho_u>0$ and $\rho_x>0$ for which Conditions A and B are satisfied, the $(n(N+1)\times n(N+1))$ Jacobi matrix $\dfrac{\partial Q_{2,\Delta_N}(\Lambda,u)}{\partial\Lambda}:R^{n(N+1)}\times R^{n(N+1)}$ is invertible for all $\Lambda\in S\left(\Lambda^{(0)},\rho_\lambda\right)$ and $u[t]\in S\left(u^{(0)}[t],\rho_u\right)$ and the following inequalities are true:*

1) $\left\|\left(\dfrac{\partial Q_{2,\Delta_N}(\Lambda,u)}{\partial\Lambda}\right)^{-1}\right\|\le\gamma_2(\Delta_N)$, *where $\gamma_2(\Delta_N)$ is constant,*

2) $q_2(\Delta_N)=\gamma_2(\Delta_N)\max\limits_{r=\overline{1,N}}\left\{\exp(L(t_r-t_{r-1}))-\sum\limits_{j=0}^{2}\dfrac{(L(t_r-t_{r-1}))^j}{j!}\right\}<1,$

3) $\dfrac{\gamma_2(\Delta_N)}{1-q_2(\Delta_N)}\left\|Q_{2,\Delta_N}(\Lambda^{(0)},u^{(0)})\right\|<\rho_\lambda,$

4) $\dfrac{\gamma_2(\Delta_N)}{1-q_2(\Delta_N)}\max\limits_{r=\overline{1,N}}\left\{\exp(L(t_r-t_{r-1}))-1\right\}\left\|Q_{2,\Delta_N}(\Lambda^{(0)},u^{(0)})\right\|<\rho_u,$

5) $\max\limits_{p=1,2}\left\{\rho_\lambda\max\limits_{r=\overline{1,N}}\sum_{j=0}^{p-1}\dfrac{(L(t_r-t_{r-1}))^j}{j!}+\rho_u\max\limits_{r=\overline{1,N}}\dfrac{(L(t_r-t_{r-1}))^{p-1}}{(p-1)!}\right\}\square\rho_x.$

Then, the sequence of pairs $\left(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t]\right)$, $k = 0,1,\ldots$, *is contained in* $S\left(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\right) \times S\left(u^{(0)}[t], \rho_u\right)$ *and converges to* $\left(\lambda^*, u^*[t]\right)$, *which is a solution to problem (3)-(6) belonging to* $S\left(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\right) \times S\left(u^{(0)}[t], \rho_u\right)$. *Furthermore, the following estimates are valid:*

(a) $\left\|\Lambda^* - \Lambda^{(k)}\right\| \le (q_2(\Delta_N))^k \dfrac{\gamma_2(\Delta_N)}{1-q_2(\Delta_N)} \left\|Q_{2,\Delta_N}\left(\Lambda^{(0)}, u^{(0)}\right)\right\|$, $k = 0,1,2,\ldots,$

(b) $\left\|u_r^*(t) - u_r^{(k)}(t)\right\| \le \left(\exp(L(t-t_{r-1})) - 1\right)\left\|\lambda_r^* - \lambda_r^{(k)}\right\|$, $\quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1,N}$.

Moreover, any solution to problem (3)-(6) belonging to $S\left(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\right) \times S\left(u^{(0)}[t], \rho_u\right)$ *is isolated.*

Based on the proved Theorem, we propose a numerical method for solving problems (1) and (2):

1) A system of equations $Q_{2,\Delta_N}(\lambda, 0) = 0$ is compiled.

2) Some vector $\lambda^{(0,0)} \in R^{2(N+1)}$ is selected and an iterative process [13] is constructed to find the solution of the $\lambda^{(0)}$ equation $Q_{2,\Delta_N}(\lambda, 0) = 0$:

$$\lambda^{(0,m+1)} = \lambda^{(0,m)} - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial Q_{2,\Delta_N}(\lambda^{(0,m)}, 0)}{\partial \lambda}\right)^{-1} Q_{2,\Delta_N}(\lambda^{(0,m)}, 0), \quad m = 0,1,2,\ldots.$$

3) The solution to the Cauchy problem is found

$$\frac{dx_r}{dt} = f(t, x_r), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad x_r \in R^n, \quad r = \overline{1,N},$$

$$x_r(t_{r-1}) = \lambda_r^{(0)}, \quad r = \overline{1,N}.$$

4) According to Theorem 1, the piecewise continuous function

$$x^{(0)}(t) = \begin{cases} x_r^{(0)}(t), & t \in [t_{r-1}, t_r), \; r = \overline{1,N}, \\ \lambda_{N+1}^{(0)}, & t = t_N, \end{cases}$$

is an approximate solution of the problem (1), (2) with an error not exceeding

$$\varepsilon = \left(\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \left\{\exp(L(t-t_{r-1})) - 1\right\} + 1\right) \frac{\gamma_2(\Delta_N)}{1-q_2(\Delta_N)} \left\|Q_{2,\Delta_N}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\right\|.$$

Example.

We consider a nonlinear two point boundary value problem for a second order ordinary differential equation [15]

$$y'' = y^2 + 2\pi^2 \cos 2\pi t - \sin^4 \pi t, \quad t \in (\pi/6, 11\pi/24), \quad y \in R, \tag{9}$$

$$\begin{cases} \operatorname{atan}\left(y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right) = 0.782647, \\ \exp\left(\dfrac{1}{2} y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right) - \exp\left(-\dfrac{1}{2} y^2\left(\dfrac{11\pi}{24}\right)\right) = 0.165009. \end{cases} \tag{10}$$

We will perform a replacement: $y = x_1$, $y' = x_2$. We will get the boundary value problem for the system of ordinary diffferential equations

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1^2 + 2\pi^2 \cos 2\pi t - \sin^4 \pi t, \end{cases} \quad t \in (\pi/6, 11\pi/24), \quad x_1, x_2 \in R, \tag{11}$$

$$\begin{cases} \operatorname{atan}\left(x_1\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right) = 0.782647, \\ \exp\left(\dfrac{1}{2} x_2\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right) - \exp\left(-\dfrac{1}{2} x_1^2\left(\dfrac{11\pi}{24}\right)\right) = 0.165009. \end{cases} \tag{12}$$

For the chosen points $\Delta_8 : t_r = \frac{\pi}{6} + \frac{r}{8}\left(\frac{11\pi}{24} - \frac{\pi}{6}\right)$, $r = \overline{0,8}$, we perform the partition $[\pi/6, 11\pi/24) = \bigcup_{r=1}^{8} [\pi(25+7r)/192, \pi(32+7r)/192)$. We will write down a system of nonlinear algebraic equations $Q_{2,\Delta_8}(\Lambda, 0) = 0$:

$$atan(\lambda_{1,1}) - 0.782647 = 0, \quad \exp\left(\frac{1}{2}\lambda_{1,2}\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_{9,1}^2\right) - 0.165009 = 0,$$

$$\frac{49\pi^2}{73728}\lambda_{r,1} + \frac{7\pi}{192}\lambda_{r,2} - \lambda_{r+1,1} + \frac{7}{6144}\sin\left(\frac{\pi^2(25+7r)}{48}\right) - \frac{7(1+4\pi^2)}{768}\sin\left(\frac{\pi^2(25+7r)}{96}\right) -$$

$$-\cos\left(\frac{\pi^2(32+7r)}{192}\right) + \cos\left(\frac{\pi^2(25+7r)}{192}\right) + \frac{1}{64\pi^2}\cos^2\left(\frac{\pi^2(32+7r)}{96}\right) - \frac{1}{4\pi^2}\cos^2\left(\frac{\pi^2(32+7r)}{192}\right) -$$

$$-\frac{1}{64\pi^2}\cos^2\left(\frac{\pi^2(25+7r)}{96}\right) + \frac{1}{4\pi^2}\cos^2\left(\frac{\pi^2(25+7r)}{192}\right) - \frac{49\pi^2}{196608} = 0, \quad r = \overline{1,8},$$

$$\frac{7\pi}{192}\lambda_{r,1} - \frac{49\pi^2}{36864}\lambda_{r,1}\lambda_{r,2} + \frac{343\pi^3}{21233664}\lambda_{r,2}^2 - \lambda_{r+1,2} -$$

$$-\frac{1}{32\pi}\sin\left(\frac{\pi^2(32+7r)}{48}\right) + \frac{1}{4\pi}\sin\left(\frac{\pi^2(32+7r)}{96}\right) +$$

$$+\frac{1}{32\pi}\sin\left(\frac{\pi^2(25+7r)}{48}\right) - \frac{1}{4\pi}\sin\left(\frac{\pi^2(25+7r)}{96}\right) +$$

$$+\pi\sin\left(\frac{\pi^2(32+7r)}{96}\right) - \pi\sin\left(\frac{\pi^2(25+7r)}{96}\right) - \frac{7\pi}{512} = 0, \quad r = \overline{1,8}.$$

We take the vector $\Lambda^{(0,0)} = \left(\begin{pmatrix}\lambda_{1,1}^{(0,0)}\\ \lambda_{1,2}^{(0,0)}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda_{2,1}^{(0,0)}\\ \lambda_{2,2}^{(0,0)}\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}\lambda_{9,1}^{(0,0)}\\ \lambda_{9,2}^{(0,0)}\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ as the initial approximation of the solution and find the solution to this system using Theorem 1 [13]. We construct the following iterative process:

$$\Lambda^{(0,m+1)} = \Lambda^{(0,m)} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q_{2,\Delta_8}\left(\Lambda^{(0,m)}, 0\right)}{\partial \Lambda}\right)^{-1} \cdot Q_{2,\Delta_8}\left(\Lambda^{(0,m)}, 0\right), \quad m = 0, 1, \ldots$$

Let's take $\Lambda^{(0,100)}$ as $\Lambda^{(0)}$, since $Q_{2,\Delta_8}\left(\Lambda^{(0,100)}, 0\right) = 0$:

$$\Lambda^{(0)} = \Lambda^{(0,100)} = \left(\begin{pmatrix}0.994513\\ -0.469637\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.823050\\ -2.394092\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.492786\\ -3.135266\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.166653\\ -2.321885\end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix}0.006523\\ -0.353855\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.092625\\ 1.792282\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.382507\\ 3.050756\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.732087\\ 2.800015\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.968376\\ 1.168976\end{pmatrix}\right)$$

Now we will find solutions of Cauchy problems (at the points $t_{r,k} = \frac{\pi}{6} + (r-1)\frac{7\pi}{192} + (k-1)\frac{7\pi}{960}$, $r = \overline{1,8}$, $k = \overline{1,6}$):

$$\begin{cases} \dfrac{dx_{r,1}}{dt} = x_{r,2}, \\ \dfrac{dx_{r,2}}{dt} = x_{r,1}^2 + 2\pi^2\cos 2\pi t - \sin^4 \pi t, \end{cases}$$

$$t \in [\pi(25+7r)/192, \pi(32+7r)/192], \quad r = \overline{1,8},$$

$$x_{r,1}(\pi(25+7r)/192) = \Lambda_{r,1}^{(0)}, \quad x_{r,2}(\pi(25+7r)/192) = \Lambda_{r,2}^{(0)}, \quad r = \overline{1,8},$$

using the method of Runge-Kutta of fourth-order accuracy with a step $\frac{7\pi}{960} \approx 0.022907$. We will define the function

$$x_1^{(0)}(t) = \begin{cases} x_{r,1}^{(0)}(t), & t \in [\pi(25+7r)/192, \pi(32+7r)/192), \quad r = \overline{1,7}, \\ x_{8,1}^{(0)}(t), & t \in [433\pi/960, 11\pi/24]. \end{cases}$$

The exact solution to the boundary value problems (1) and (2) is the function $y(t) = \sin^2(\pi t)$, and the approximate solution is the function $x_1^{(0)}(t)$.

The following table shows the values of the numerical solution of the boundary value problems (1) and (2), as well as the difference between the numerical solution and the exact solution at the points $\hat{t}_j = \frac{\pi}{6} + (j-1)\frac{7\pi}{960}$, $j = \overline{1,41}$, where $\hat{t}_1 = \frac{\pi}{6} \approx 0.523599$, $\hat{t}_{41} = \frac{11\pi}{24} \approx 1.439897$:

Table 1

j	$\hat{t}_j$	$x_1^{(0)}(\hat{t}_j)$	$x_1^{(0)}(\hat{t}_j) - y(\hat{t}_j)$	j	$\hat{t}_j$	$x_1^{(0)}(\hat{t}_j)$	$x_1^{(0)}(\hat{t}_j) - y(\hat{t}_j)$
1	0,523599	0,994513	-0,000001	21	0,981748	0,006523	0,003239
2	0,546506	0,978678	-0,000127	22	1,004655	0,003582	0,003368
3	0,569414	0,952941	-0,000254	23	1,027563	0,010977	0,003498
4	0,592321	0,917831	-0,000381	24	1,050470	0,028557	0,003627
5	0,615229	0,874072	-0,000508	25	1,073377	0,055962	0,003756
6	0,638136	0,823050	-0,000152	26	1,096285	0,092625	0,003883
7	0,661043	0,765054	-0,000086	27	1,119192	0,137793	0,004009
8	0,683951	0,701576	-0,000018	28	1,142100	0,190535	0,004136
9	0,706858	0,633928	0,000048	29	1,165007	0,249764	0,004265
10	0,729766	0,563512	0,000115	30	1,187915	0,314257	0,004394
11	0,752673	0,492786	0,001184	31	1,210822	0,382507	0,004349
12	0,775581	0,421301	0,001320	32	1,233730	0,453412	0,004438
13	0,798488	0,351471	0,001455	33	1,256637	0,525374	0,004529
14	0,821396	0,284743	0,001591	34	1,279545	0,596908	0,004623
15	0,844303	0,222500	0,001728	35	1,302452	0,666536	0,004720
16	0,867210	0,166653	0,002486	36	1,325359	0,732087	0,004086
17	0,890118	0,117121	0,002614	37	1,348267	0,793651	0,004181
18	0,913025	0,075562	0,002742	38	1,371174	0,849233	0,004280
19	0,935933	0,042837	0,002870	39	1,394082	0,897684	0,004381
20	0,958840	0,019627	0,003000	40	1,416989	0,938006	0,004488
				41	1,439897	0,969366	0,004597

As can be seen from Table 1, the estimate holds:

$$\max_{j=\overline{1,41}} \| x_1(\hat{t}_j) - y(\hat{t}_j) \| < 0.0046.$$

Due to the fact that the algorithms of the Dzhumabaev parameterization method are convenient for numerical implementation, in the future they can become one of universal tools for identifying and finding approximate solutions to nonlinear boundary value problems.

REFERENCES

1. V.E. Shamanskii, *Methods for the Numerical Solution of Boundary-Value Problems on Computers, Vol. 1* (Naukova Dumka, Kiev, 1963). [in Russian]
2. R. Bellman and R. Kalaba, *Quasilinearization and Nonlinear Boundary-Value Problems* (Elsevier, New York, 1965).

3. H.B. Keller, *Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems* (Walthan, Blaisdell, 1968).
4. S.M. Roberts and J.S. Shipman, *Two-Point Boundary-Value Problems: Shooting Methods* (Elsevier, New York, 1972).
5. N.C. Bakhvalov, *Numerical Methods* (Nauka Publi., Moscow, 1973). [in Russian]
6. H.B. Keller and A.B. White, "Difference methods for boundary-value problems in ordinary differential equations", *SIAM J. Numer. Anal.*, 12:5 (1975), 791-802.
7. G. Hall and J.M. Watt (editors), *Modern Numerical Methods for Ordinary Differential Equations* (Clarendon Press, Oxford, 1976).
8. P.L. Monastyrnyi, "On the relationship between the isolatedness of solutions and the convergence of shooting methods", *Differents. Uravn.*, 16:4 (1980), 732-740.
9. K.I. Babenko, *Foundations of Numerical Analysis* (Nauka, Moscow, 1986). [in Russian]
10. I.T. Kiguradze, *Boundary value problems for systems of ordinary differential equations, in: VINITI Series in Contemporary Problems of Mathematics. Latest Achievements* (Nauka, Moscow, 1987), 3-103. [in Russian]
11. A.M. Samoilenko and N. I. Ronto, *Numerical-Analytic Methods for the Investigation of the Solutions of Boundary-Value Problems* (Naukova Dumka, Kiev, 1986). [in Russian]
12. D.S. Dzhumabayev, "Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation", *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 29:1 (1989), 34–46.
13. D.S. Dzhumabaev and S.M. Temesheva, "A parametrization method for solving nonlinear two-point boundary value problems", *Comput. Math. Math. Phys.*, 47:1 (2007), 37–61.
14. D.S. Dzhumabaev and S.M. Temesheva, "Necessary and sufficient conditions for the existence of an "izolated" solution of a nonlinear two-point boundary-value problem", *Journal of Math. Sci. (United States)*, 94:4 (2013), 341-353.
15. Sung N. Ha. "A Nonlinear Shooting Method for Two-Point Boundary Value Problems", *Computers and Mathematics with Applications*, 42(2001), 1411-1420.

С.М. Темешева

Жұмабаевтың параметрлеу әдісі алгоритмдерінің модификациясы және сандық әдіс

Аңдатпа: Мақалада Д.С. Жұмабаевтың параметрлеу әдісі алгоритмдерінің бір модификациясы қарастырылады. Қосымша параметрлер кесіндінің ішкі бөліну нүктелерінде және кесіндінің екі ұшында да енгізіледі. Бұл алгоритмдердің жинақталуының жеткілікті шарттары бастапқы берілімдер терминдерінде келтіріледі. Дифференциалдық теңдеулер жүйесінің оң жағын және шекаралық шарт функциясын қолдана отырып, белгісіз параметрлердің бастапқы жуықтауын табу үшін сызықтық емес операторлық теңдеуі құрылады. Жай дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес екі нүктелі шеттік есептің шешімін табудың сандық әдісі ұсынылады. Сандық әдіс тестілік мысалға қолданылады.

Түйінді сөздер: сызықтық емес екі нүктелі шеттік есеп, Жұмабаевтың параметрлеу әдісі, жеткілікті шарттар, оқшауланған шешім, сандық әдіс

С.М. Темешева

Модификация алгоритмов метода параметризации Джумабаева и численный метод

Аннотация. В статье рассматривается одна модификация алгоритмов метода параметризации Д.С. Джумабаева. Дополнительные параметры вводятся во внутренних точках разбиения отрезка и на обоих концах отрезка. Приведены достаточные условия сходимости этих алгоритмов в терминах исходных данных. С помощью правой части системы дифференциальных уравнений и функции краевого условия построено нелинейное операторное уравнение для нахождения начальных приближений неизвестных параметров. Предлагается численный метод нахождения решения нелинейной двухточечной краевой задачи для

системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Численный метод реализован на тестовом примере.

Ключевые слова: нелинейная двухточечная краевая задача, метод параметризации Джумабаева, достаточные условия, изолированное решение, численный метод.

About the author

Temesheva, Svetlana Maratovna-Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Al-Farabi National University, Department of Fundamental Mathematics

UDC 517.927

Uteshova R.E.
International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan

SINGULAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION

Abstract. *The paper deals with a nonlinear ordinary differential equation with singularities at the endpoints of a finite interval. The definition of a limit with a weight solution is introduced and its attracting property is established. A singular boundary value problem for the differential equation is studied, where the boundary condition imposed on a solution is the requirement of its belonging to a functional ball centered at the limit solution.*

Key words: *nonlinear differential equation, singular boundary value problem, limit with a weight solution, approximation.*

On $(0,T)$, we consider a differential equation

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|, \tag{1}$$

where $f(t,x): (0,T) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is a continuous function with singularities at the endpoints mentioned in what follows in condition C_2.

Equations with singularities at the endpoint are often encountered in applications. Various problems for such equations have been studied by numerous authors (see [1-3] and references therein). To investigate the behavior of solutions of (1) at singular points, one can use so-called “limit solutions”.

In [4], for a nonlinear differential equation considered on the whole real line, the concept of a “limit solution as $t \to \infty$” was introduced. The conditions were established under which all solutions to the differential equation that belong to a functional ball coincide with a limit solution as $t \to \infty$. Using Lyapunov transformations and limit solutions, regular two-point boundary value problems were constructed that allow us, to a given degree of accuracy, to determine the restrictions of solutions bounded on the whole real line to a finite interval. To this end, iterative processes for unbounded operator equations [6] and the results obtained in [7] were used where analogous problems were studied for a linear ordinary differential equation.

It was proved that, under certain assumptions about the right-hand side of the equation, the limit solution $x_0(t)$ possesses an attracting property; i.e. there exists a functional ball centered at $x_0(t)$ where the differential equation has at least one solution, and all solutions from this ball coincide with $x_0(t)$. This property made it possible to solve the problem of approximation of a bounded on the whole real line solution to the differential equation.

Note that the attracting property of the limit solution $x_0(t)$ as $t \to \infty$ was established under the assumption that the differential equation linearized along the limit solution

$$\frac{dy}{dt} = f_x{}'(t, x_0(t))y, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

admits an exponential dichotomy on $\mathbb{R}$. However, in the case where the differential equation has certain singularities on its domain, it is necessary to take into account these features.

The concept of a limit solution was extended in [7] to the case of a nonlinear differential equation with a singularity at the left endpoint of the domain interval. In this case the limit solution was introduced with a weight that accounts for singularities of the equation considered. An attracting property of the limit with a weight solution was established.

This paper deals with singular boundary value problems for Eq. (1) on a finite interval. We define the concept of a limit solution at singular points and establish conditions under which this solution possesses an attracting property. We then construct approximating regular two-point boundary value problems that allow us to yield solutions of the singular boundary value problem of any specified accuracy.

Let *r* be a positive constant and $x_0(t)$ be a function continuously differentiable on $(0, T)$.

We will use the following notation:

$\check{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R}^n)$ is a space of functions $x: \mathcal{J} \to \mathbb{R}^n$ continuous and bounded on $\mathcal{J} \subseteq (0, T)$ with the norm $\|x\|_1 = sup_{t \in \mathcal{J}} \|x(t)\|$;

$$S(x_0(t), \mathcal{J}, r) = \{x(t) \in \check{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R}^n):\ x(t) - x_0(t) \in \check{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R}^n), \|x - x_0\|_1 < r\};$$

$$G(x_0(t), \mathcal{J}, r) = \{(t, x):\ t \in \mathcal{J}, \|x - x_0\| < r\}.$$

The following conditions are assumed to be met:

C$_1$. The function $f_x{}'(t, x)$ is uniformly continuous in $G(x_0(t), (0, T), r)$.

C$_2$. The function $\alpha(t) = \|f_x{}'(t, x_0(t))\|$ satisfies the relations

$$\lim_{\delta \to 0+0} \int_\delta^{T/2} \alpha(t)dt = \infty, \quad \lim_{\delta \to 0+0} \int_{T/2}^{T-\delta} \alpha(t)dt = \infty;$$

C$_3$. $\lim_{t \to 0+0} \frac{f_x{}'(t, x_0(t))}{\alpha(t)} = A_0$, $\lim_{t \to T-0} \frac{f_x{}'(t, x_0(t))}{\alpha(t)} = A_T$, where A_0 and A_T are constant matrices whose eigenvalues have nonzero real parts: $\mathrm{Re}\,\lambda_i(A_0) \neq 0, \mathrm{Re}\,\lambda_i(A_T) \neq 0,\ i = \overline{1, n}$.

C$_4$. $\lim_{t \to 0+0} \frac{f(t,x)}{\alpha(t)} = f_0(x)$ and $\lim_{t \to T-0} \frac{f(t,x)}{\alpha(t)} = f_T(x)$.

Definition. *A function $x_T(t)$ continuously differentiable on $(0, T)$ is called a limit solution of Eq. (1) with weight $1/\alpha(t)$ as $t \to T - 0$ if*

$$\lim_{t \to T-0} \frac{\|\dot{x}_T(t) - f(t, x_T(t))\|}{\alpha(t)} = 0.$$

By S_0 and S_T we denote some real nonsingular ($n \times n$) matrices that reduce the matrices A_0 and A_T, respectively, to the generalized Jordan form

$$\tilde{A}_0 = S_0 A_0 S_0^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^0 & 0 \\ 0 & A_{22}^0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_T = S_T A_T S_T^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^T & 0 \\ 0 & A_{22}^T \end{pmatrix},$$

where A_{ii}^{0} and A_{ii}^{T}, $i = 1,2$, consist of generalized Jordan boxes corresponding to the eigenvalues of the matrices A_0 and A_T with negative and positive real parts, respectively. Let n_1 and n_2 denote the respective numbers of eigenvalues of A_0 with negative real parts and eigenvalues of A_T with positive real parts.

Consider the problem

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad t \in [T-\delta, T),\ 0 < \delta < T, \tag{2}$$

$$P_T S_T[x(T-\delta) - x_T(T-\delta)] = d, \quad d \in \mathbb{R}^{n_2}, \tag{3}$$

$$x(t) \in S(x_T(t), [T-\delta, T), r_0), \quad r_0 > 0, \tag{4}$$

where $P_T = (0, I_{n_2})$ is an $(n_2 \times n)$ matrix.

Theorem 1. *Suppose that $x_T(t)$ is a limit solution with weight $1/\alpha(t)$ as $t \to T-0$ of Eq. (1) and the conditions C_1 –C_3 are satisfied. Then there exist numbers $\delta_0 \in (0,T)$, $r_0 > 0$, and $\rho_0 > 0$ such that, for any $\delta \in (0,\delta_0]$, problems (2) - (4) possesseses a unique solution for all $d \in \mathbb{R}^{n_2}$ satisfying the inequality $\|d\| < \rho_0$.*

The following theorem establishes an attracting property of the limit solution.

Theorem 2. *Suppose $x_T(t)$ is a limit solution of Eq. (1) with weight $1/\alpha(t)$ as $t \to T-0$ and conditions C_1 – C_3 are satisfied. Then:*

(i) there exist numbers $\delta_0 > 0$ and $r_0 \in (0,r]$ such that Eq. (1) has at least one solution in

$$S(x_T(t), [T-\delta_0, T), r_0);$$

(ii) any solution $x(t)$ of Eq. (1) belonging to $S(x_T(t), [T-\delta_0, T), r_0)$ satisfies the limit relation

$$\lim_{t \to T-0} \|x(t) - x_T(t)\| = 0.$$

In an analogous way, we can define a limit solution $x_0(t)$ of Eq. (1) with weight $1/\alpha(t)$ as $t \to 0+0$ and prove its attracting property.

We now proceed to a singular boundary value problem for Eq. (1). As a boundary condition we place the requirement on solutions to belong to a functional ball centered at a limit solution.

Problem 1 is to find a solution $\tilde{x}(t)$ to Eq. (1) that belongs to the functional ball

$$\tilde{x}(t) \in S\big(x_{0,T}(t), (0,T), r\big),$$

where $x_{0,T}(t)$ is a limit solution of Eq. (1) with weight $1/\alpha(t)$ as $t \to 0+0$ and $t \to T-0$.

To find an approximate solution to Problem 1 we pose the following problem.

Problem 2. Given $\varepsilon > 0$ it is required to determine a number $\delta > 0$ and a continuous function $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ for which a solution $x_\delta(t)$ of the two-point boundary value problem

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad t \in (\delta, T-\delta), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$g[x(\delta), x(T-\delta)] = 0,$$

satisfies the inequality

$$\max_{t \in [\delta, T-\delta]} \|x_\delta(t) - x_{0,T}(t)\| < \varepsilon,$$

where $x_{0,T}(t)$ is a solution to Problem 1.

Let us construct the $(n \times n)$ matrices

$$P_1 = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix},$$

here I_{n_r} are the identity matrices of order n_r, $r = 1,2$. Under conditions C1-C4, we have constructed a regular two-point boundary value problem approximating Problem 1:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad t \in (\delta, T-\delta), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$P_1 S_0 f_0\big(x(\delta)\big) + P_2 S_T f_T\big(x(T-\delta)\big) = 0.$$

It can be shown that there is a mutual relationship between the solvability of Problem 1 and that of its approximating two-point regular boundary value problem.

REFERENCES

1. Kiguradze, I.T. and Shekhter, B. L. Singular boundary-value problems for ordinary differential equations of the second order, in: *VINITI Series in Contemporary Problems of Mathematics. Latest Achievements* [in Russian] 30, 105–201 (1987).
2. Samoilenko, A. M., Shkil', M. I., and Yakovets', V. P. Linear Systems of Differential Equations with Degenerations [in Ukrainian]. *Vyshcha Shkola, Kyiv* (2000).
3. Kudryavtsev, L. D. Problems with initial asymptotic data for systems of ordinary differential equations. *Dokl. Ros. Akad. Nauk*, 407(2), 172 – 175 (2006).
4. Dzhumabaev, D. S. Singular boundary value problems and their approximation for nonlinear ordinary differential equations. *Journal of Comp. Math. and Math. Phys.*, 32(1), 13 - 29 (1992).
5. Dzhumabaev, D.S. Convergence of iterative methods for unbounded operator equations. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR* 41, 356–361 (1987). https://doi.org/10.1007/BF01159858
6. Dzhumabaev, D. S. Approximation of bounded solutions and exponential dichotomy on the axis. *Journal of Comp. Math. and Math. Phys.*, 30(6), 32 – 43 (1990). https://doi.org/10.1016/0041-5553(90)90106-3
7. Dzhumabaev, D.S. and Uteshova, R.E. Weighted limit solution of a nonlinear ordinary differential equation at a singular point and its property. *Ukrainian Mathematical Journal*, 69(12), 1997 – 2004 (2018). https://doi.org/10.1007/s11253-018-1483-2

Утешова Р.Е.

Бейсызықты дифференциалдық теңдеу үшін сингулярлы шеттік есептер

Аңдатпа: Оң жағының аралықтың шеттерінде елеулі ерекшеліктері бар бей сызықты жай дифференциалдық теңдеу қарастырылады. Салмақты шегі бар шешімнің ұғымы енгізілген, оның тарту қасиеті анықталды. Берілген теңдеу үшін сингулярлы шеттік есеп зерттелінеді, оның шекаралық шарты шешімінің белгілі бір функционалды шарға жататындығы болып табылады.

Түйінді сөздер: бейсызықты дифференциалдық теңдеу, сингулярлы шеттік есеп, салмақты шегі бар шешім, аппроксимация

Утешова Р.Е.

Сингулярные краевые задачи для нелинейного дифференциального уравнения

Аннотация. В статье рассматривается нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение с особенностями в конечных точках интервала. Вводится понятие предельного с весом решения и устанавливается его притягивающее свойство. Изучается сингулярная краевая задача для данного уравнения, в которой качестве краевого условия выступает требова-

ние принадлежности решения к некоторому функциональному шару, центром которого является предельное с весом решение.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, сингулярная краевая задача, предельное с весом решение, аппроксимация.

About the author:
Roza E. Uteshova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, Department of Mathematical and Computer Modeling, International Information Technology University.

Сведения об авторе:
Утешова Роза Есеновна, кандидат физико-математических наук, ассистент-профессор кафедры математического и компьютерного моделирования, Международный университет информационных технологий.

УДК 517.968.7, 519.622.2

E.A. Bakirova[1,*], Zh.M. Kadirbayeva[1,2]

[1]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
[2]International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan

NUMERICAL SOLUTION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE LOADED DIFFERENTIAL AND FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract. *The article presents a computational method to solve boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations. Solving a problem for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations is reduced to solving a system of linear algebraic equations in relation to the additional parameters introduced. A numerical method for finding a solution of the problem is suggested, which is based on solving the constructed system and the Bulirsch-Stoer method for solving Cauchy problems on the subintervals. The result is illustrated by example.*
Key words: *integro-differential equation, loaded differential equation, parametrization method, numerical method.*

Introduction. Loaded differential equations are used to solve problems of long-term prediction and control of the groundwater level and soil moisture [1, 2]. Various problems for loaded differential equations and methods of finding their solutions are considered in [1, 3-8].

A new concept of a general solution of a linear loaded differential equation was proposed in [9]. A new general solution was introduced for the linear Fredholm integro-differential equation in [10]. Replacing the integral term of an integro-differential equation with a quadrature formula also leads to a loaded differential equation. Therefore, numerical and approximate methods for solving boundary value problems for loaded differential equations are also used in solving boundary value problems for integro-differential equations.

On the basis of the parametrization method [11], in [10], a new approach to the general solution of the linear Fredholm integro-differential equation was proposed. The interval where the equation is considered is divided into parts, and the values of the solution at the starting points of subintervals are taken as additional parameters. With the help of newly introduced unknown functions on the sub-intervals, a special Cauchy problem for a system of integro-differential equations with parameters is received. Using the solution of the special Cauchy problem, a new general solution of the Fredholm linear integro-differential equation is constructed. This general solution, in contrast to the classical general solution, exists for all Fredholm linear integro-differential equations. The new general solution allowed us to propose numerical and approximate methods for solving linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations. The basis of these methods is to construct and solve systems of linear algebraic equations with respect to arbitrary vectors of the new general solution. Coefficients and right-hand sides of the systems are determined by solving the Cauchy problems for linear ordinary differential equations on sub-intervals and solving the linear Fredholm integral equation of the second kind. In [12-14], the linear ordinary Fredholm integral-differential equation is approximated by a loaded differential equation. The interrelation between the well-posed solvability of linear boundary value problems for the initial Fredholm integro-differential equation and the approximated loaded differential equation is established. The necessary and sufficient conditions for the well-posed solvability of a linear two-point boundary value problem for the system of Fredholm integro-differential equations, containing the derivative in the integral member, in terms of the fundamental matrix and the solvability of the second-kind Fredholm equation, were established in [15].

Despite the large number of papers devoted to the study and solving of boundary value problems for loaded differential and integro-differential equations, many questions related to the solvability of boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations remain unsolved.

Statement of problem. Consider the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + \sum_{k=1}^{m}\int_0^T \varphi_k(t)\psi_k(s)x(s)ds + \sum_{i=1}^{N} A_i(t)x(\theta_i) + f(t),\ t\in(0,T), \quad (1)$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d,\quad d\in R^n,\quad x\in R^n, \quad (2)$$

where the $(n\times n)$-matrices $A_j(t)$, $j=\overline{0,N}$, $\varphi_k(t)$ and $\psi_k(\tau)$ are continuous on $[0,T]$, $k=\overline{1,m}$; the n-vector $f(t)$ is continuous on $[0,T]$; B and C are constant $(n\times n)$ - matrices, and $0=\theta_0<\theta_1<\dots<\theta_N<\theta_{N+1}=T$, $\|x\| = \max_{i=\overline{1,n}}|x_i|$.

Let $C([0,T],R^n)$ denote the space of continuous on $[0,T]$ functions $x(t)$ with norm $\|x\|_1 = \max_{t\in[0,T]}\|x(t)\|$.

The solution to problems (1) and (2) is a continuously differentiable on $(0,T)$ function $x(t)\in C([0,T],R^n)$ satisfying the system of loaded differential and Fredholm integro-differential equations (1) and boundary condition (2).

Scheme of parametrization method. Given the points: $0=\theta_0<\theta_1<\dots<\theta_N<\theta_{N+1}=T$, and let Δ_N denote the partition of interval $[0,T)$ into $N+1$ subintervals $[0,T) = \cup_{r=1}^{N+1}[\theta_{r-1},\theta_r)$.

Define the space $C([0,T],\Delta_N,R^{n(N+1)})$ of systems of functions $x[t]=(x_1(t),x_2(t),\dots,x_{N+1}(t))$, where $x_r:[\theta_{r-1},\theta_r)\to R^n$ are continuous on $[\theta_{r-1},\theta_r)$ and have finite left-sided limits $\lim_{t\to\theta_r-0}x_r(t)$ for all $r=\overline{1,N+1}$, with norm $\|x[\cdot]\|_2 = \max_{r=\overline{1,N+1}}\sup_{t\in[\theta_{r-1},\theta_r)}\|x_r(t)\|$.

The restriction of the function $x(t)$ to the r –th interval $[\theta_{r-1},\theta_r)$ is denoted by $x_r(t)$, i.e. $x_r(t)=x(t)$ for $t\in[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,N+1}$. Then we introduce additional parameters

$\lambda_r = x_r(\theta_{r-1})$, $r = \overline{1, N+1}$. Making the substitution $x_r(t) = u_r(t) + \lambda_r$ on every r -th interval $[\theta_{r-1}, \theta_r)$, $r = \overline{1, N+1}$, we obtain the boundary value problem with parameters

$$\frac{du_r}{dt} = A_0(t)[u_r + \lambda_r] + \sum_{j=1}^{N+1}\sum_{k=1}^{m}\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j}\varphi_k(t)\psi_k(s)[u_j + \lambda_j]ds +$$

$$+\sum_{i=1}^{N} A_i(t)\lambda_{i+1} + f(t), \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \quad r = \overline{1, N+1}, \tag{3}$$

$$u_r(\theta_{r-1}) = 0, \; r = \overline{1, N+1}, \tag{4}$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_{N+1} + C\lim_{t\to T-0} u_{N+1}(t) = d, \tag{5}$$

$$\lambda_s + \lim_{t\to\theta_s-0} u_s(t) = \lambda_{s+1}, \quad s = \overline{1, N}. \tag{6}$$

where (6) are conditions for matching the solution at the interior points of partition Δ_N.

A pair $(u^*[t], \lambda^*)$ with elements $u^*[t] = (u_1^*(t), u_2^*(t), \dots, u_{N+1}^*(t)) \in C([0,T], \Delta_N, R^{n(N+1)})$, $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_{N+1}^*) \in R^{n(N+1)}$ is said to be a solution to problems (3)-(6) if the functions $u_r^*(t)$, $r = \overline{1, N+1}$, are continuously differentiable on $[\theta_{r-1}, \theta_r)$ and satisfy (3) and additional conditions (5) and (6) with $\lambda_j = \lambda_j^*$, $j = \overline{1, N+1}$, and initial conditions (4).

Problems (1), (2) and (3)-(6) are equivalent. If the $x^*(t)$ is a solution of problems (1) and (2), then the pair $(u^*[t], \lambda^*)$, where $u^*[t] = (x^*(t) - x^*(\theta_0), x^*(t) - x^*(\theta_1), \dots, x^*(t) - x^*(\theta_N))$, and $\lambda^* = (x^*(\theta_0), x^*(\theta_1), \dots, x^*(\theta_N))$, is a solution of problems (3)-(6). Conversely, if a pair $(\tilde{u}[t], \tilde{\lambda})$ with elements $\tilde{u}[t] = (\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t), \dots, \tilde{u}_{N+1}(t)) \in C([0,T], \Delta_N, R^{n(N+1)})$, $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_{N+1}) \in R^{n(N+1)}$, is a solution of (3)-(6), then the function $\tilde{x}(t)$ defined by the equalities $\tilde{x}(t) = \tilde{u}_r(t) + \tilde{\lambda}_r$, $t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)$, $r = \overline{1, N+1}$, and $\tilde{x}(T) = \lim_{t\to T-0}\tilde{u}_{N+1}(t) + \tilde{\lambda}_{N+1}$, will be the solution of the original problems (1) and (2).

Fixed λ_j problems (3) and (4) are special Cauchy problems for the system of Fredholm integro-differential equations. We have $N+1$ Cauchy problems on the intervals $[\theta_{r-1}, \theta_r)$, $r = \overline{1, N+1}$, and the system of integro-differential equations includes of the sum of integrals of all $N+1$ functions $u_r(t)$ with degenerate kernels on the segments $[\theta_{r-1}, \theta_r]$.

Using the fundamental matrix $X_r(t)$ of differential equation $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ on $[\theta_{r-1}, \theta_r]$, we reduce the special Cauchy problem for the system of integro-differential equations with parameters (3) and (4) to the equivalent system of integral equations

$$u_r(t) = X_r(t)\int_{\theta_{r-1}}^{t} X_r^{-1}(\tau)A_0(\tau)\,d\tau\,\lambda_r + X_r(t)\int_{\theta_{r-1}}^{t} X_r^{-1}(\tau)\sum_{i=1}^{N} A_i(t)\lambda_{i+1}\,d\tau +$$

$$+X_r(t)\int_{\theta_{r-1}}^{t} X_r^{-1}(\tau)\sum_{j=1}^{N+1}\sum_{k=1}^{m}\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j}\varphi_k(\tau)\psi_k(s)[u_j(s) + \lambda_j]ds\,d\tau +$$

$$+X_r(t)\int_{\theta_{r-1}}^{t} X_r^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau, \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \quad r = \overline{1, N+1}. \tag{7}$$

Let $\mu_k = \sum_{j=1}^{N+1}\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j}\psi_k(s)u_j(s)ds$, $k = \overline{1, m}$, and rewrite the system of integral equations (7) in the following form

$$u_r(t) = \sum_{k=1}^{m} X_r(t)\int_{\theta_{r-1}}^{t} X_r^{-1}(\tau)\varphi_k(\tau)\,d\tau\,\mu_k +$$

$$+X_r(t)\int_{\theta_{r-1}}^{t}X_r^{-1}(\tau)A_0(\tau)d\tau\,\lambda_r+X_r(t)\int_{\theta_{r-1}}^{t}X_r^{-1}(\tau)\sum_{i=1}^{N}A_i(t)\lambda_{i+1}d\tau+$$

$$+X_r(t)\int_{\theta_{r-1}}^{t}X_r^{-1}(\tau)\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(\tau)\sum_{j=1}^{N+1}\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j}\psi_k(s)\lambda_j ds\,d\tau+$$

$$+X_r(t)\int_{\theta_{r-1}}^{t}X_r^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau,\quad t\in[\theta_{r-1},\theta_r),\ r=\overline{1,N+1}. \tag{8}$$

Multiplying both sides of (8) by $\psi_p(t)$, integrating on the interval $[\theta_{r-1},\theta_r]$ and summing up over r, we get the system of linear algebraic equations with respect to $\mu=(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_m)\in R^{nm}$

$$\mu_p=\sum_{k=1}^{m}G_{p,k}(\Delta_N)\mu_k+\sum_{r=1}^{N+1}V_{p,r}(\Delta_N)\lambda_r+\sum_{j=1}^{N}W_{p,j}(\Delta_N)\lambda_{j+1}+g_p(f,\Delta_N),\ \ p=\overline{1,m}, \tag{9}$$

with the $(n\times n)$ matrices

$$G_{p,k}(\Delta_N)=\sum_{r=1}^{N+1}\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r}\psi_p(\tau)X_r(\tau)\int_{\theta_{r-1}}^{\tau}X_r^{-1}(s)\varphi_k(s)ds\,d\tau,\quad k=\overline{1,m},$$

$$V_{p,r}(\Delta_N)=\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r}\psi_p(\tau)X_r(\tau)\int_{\theta_{r-1}}^{\tau}X_r^{-1}(s)A_0(s)\,ds\,d\tau+\sum_{j=1}^{N+1}\sum_{k=1}^{m}\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j}\psi_p(\tau)\times$$

$$\times X_j(\tau)\int_{\theta_{j-1}}^{\tau}X_j^{-1}(\tau_1)\varphi_k(\tau_1)d\tau_1 d\tau\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r}\psi_k(s)ds,\quad r=\overline{1,N+1},$$

$$W_{p,j}(\Delta_N)=\sum_{r=1}^{N+1}\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r}\psi_p(\tau)X_r(\tau)\int_{\theta_{r-1}}^{\tau}X_r^{-1}(s)A_j(s)ds\,d\tau,\quad j=\overline{1,N},$$

and vectors of dimension n

$$g_p(f,\Delta_N)=\sum_{r=1}^{N+1}\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r}\psi_p(\tau)X_r(\tau)\int_{\theta_{r-1}}^{\tau}X_r^{-1}(s)f(s)ds\,d\tau,\ \ p=\overline{1,m},$$

Using the matrices $G_{p,k}(\Delta_N)$, $V_{p,r}(\Delta_N)$, $W_{p,j}(\Delta_N)$, form the $G(\Delta_N)=\left(G_{p,k}(\Delta_N)\right),p,k=\overline{1,m}$, and $V(\Delta_N)=\left(V_{p,r}(\Delta_N)\right)$, $p=\overline{1,m}$, $r=\overline{1,N+1}$, and $W(\Delta_N)=\left(W_{p,j}(\Delta_N)\right)$, $p=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,N}$. Then the system (9) has the form

$$[I-G(\Delta_N)]\mu=V(\Delta_N)\lambda+W(\Delta_N)\xi+g(f,\Delta_N), \tag{10}$$

where I is the identity matrix of dimension nm, $\xi=(\lambda_2,\lambda_3,\dots,\lambda_{N+1})\in R^{nN}$ and

$$g(f,\Delta_N)=\left(g_1(f,\Delta_N),g_2(f,\Delta_N),\dots,g_m(f,\Delta_N)\right)\in R^{nm}.$$

Definition 1. Partition Δ_N is called regular if the matrix $I-G(\Delta_N)$ is invertible.

Let $\sigma(m,[0,T])$ denote the set of regular partitions Δ_N of $[0,T]$ for the equation (1).

Definition 2. The special Cauchy problems (3) and (4) is called uniquely solvable, if for any $\lambda\in R^{n(N+1)}$, $f(t)\in C([0,T],R^n)$ they have a unique solution.

Special Cauchy problems (3) and (4) is equivalent to the system of integral equations (7). This system by virtue of the kernel degeneracy is equivalent to the system of algebraic equations (9) with respect to $\mu=(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_m)\in R^{nm}$. Therefore, the special Cauchy problem is uniquely solvable if and only if the partition Δ_N, generating this problem, is regular.

Since the special Cauchy problem is uniquely solvable for the sufficiently small partition step $h>0$ (see [14]), the set $\sigma(m,[0,T])$ is not empty.

Take $\Delta_N\in\sigma(m,[0,T])$ and present $[I-G(\Delta_N)]^{-1}$ in the next form

$$[I-G(\Delta_N)]^{-1}=\left(M_{k,p}(\Delta_N)\right),\ k,p=\overline{1,m},$$

where $M_{k,p}(\Delta_N)$ are the square matrices of dimension n.

Then according to (10) the elements of vector $\mu \in R^{nm}$ can be determined by the equalities

$$\mu_k = \sum_{j=1}^{N+1}\left(\sum_{p=1}^{m} M_{k,p}(\Delta_N)V_{p,j}(\Delta_N)\right)\lambda_j + \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{p=1}^{m} M_{k,p}(\Delta_N)W_{p,j}(\Delta_N)\right)\lambda_{j+1} + $$
$$+\sum_{p=1}^{m} M_{k,p}(\Delta_N)g_p(f,\Delta_N)\,,\ k=\overline{1,m}, \qquad (11)$$

In (8), substituting the right-hand side of (11) instead of μ_k, we get the representation of functions $u_r(t)$ via λ_j, $j=\overline{1,N+1}$:

$$u_r(t) = \sum_{j=1}^{N+1}\left\{\sum_{k=1}^{m} X_r(t)\int_{\theta_{r-1}}^{t} X_r^{-1}(\tau)\varphi_k(\tau)d\tau \sum_{p=1}^{m} M_{k,p}(\Delta_N)V_{p,j}(\Delta_N)\right\}\lambda_j +$$
$$+\sum_{j=1}^{N+1}\left\{\sum_{k=1}^{m} X_r(t)\int_{\theta_{r-1}}^{t} X_r^{-1}(\tau)\varphi_k(\tau)d\tau \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j}\psi_k(s)ds\right\}\lambda_j +$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\left\{\sum_{k=1}^{m} X_r(t)\int_{\theta_{r-1}}^{t} X_r^{-1}(\tau)\varphi_k(\tau)d\tau \sum_{p=1}^{m} M_{k,p}(\Delta_N)W_{p,j}(\Delta_N)\right\}\lambda_{j+1} +$$
$$+X_r(t)\int_{\theta_{r-1}}^{t} X_r^{-1}(\tau)A_0(\tau)d\tau\,\lambda_r + X_r(t)\int_{\theta_{r-1}}^{t} X_r^{-1}(\tau)\sum_{i=1}^{N} A_i(t)\lambda_{i+1}d\tau +$$
$$+X_r(t)\int_{\theta_{r-1}}^{t} X_r^{-1}(\tau)\left[\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(\tau)\sum_{p=1}^{m} M_{k,p}(\Delta_N)g_p(f,\Delta_N) + f(\tau)\right]d\tau,$$
$$t\in[\theta_{r-1},\theta_r),\ \ r=\overline{1,N+1}. \qquad (12)$$

Introduce the notations:

$$D_{r,j}(\Delta_N) = \sum_{k=1}^{m} X_r(\theta_r)\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r} X_r^{-1}(\tau)\varphi_k(\tau)d\tau\Big[\sum_{p=1}^{m} M_{k,p}(\Delta_N)V_{p,j}(\Delta_N) +$$
$$+\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j}\psi_k(s)ds\Big],\quad j\neq r,\ r,j=\overline{1,N+1},$$

$$D_{r,r}(\Delta_N) = \sum_{k=1}^{m} X_r(\theta_r)\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r} X_r^{-1}(\tau)\varphi_k(\tau)d\tau\Big[\sum_{p=1}^{m} M_{k,p}(\Delta_N)V_{p,r}(\Delta_N) +$$
$$+\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r}\psi_k(s)ds\Big] + X_r(\theta_r)\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r} X_r^{-1}(\tau)A_0(\tau)d\tau,\ \ r=\overline{1,N+1},$$

$$E_{r,j}(\Delta_N) = \sum_{k=1}^{m} X_r(\theta_r)\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r} X_r^{-1}(\tau)\varphi_k(\tau)d\tau \sum_{p=1}^{m} M_{k,p}(\Delta_N)W_{p,j}(\Delta_N) +$$
$$+X_r(\theta_r)\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r} X_r^{-1}(\tau)A_j(t)d\tau,\ \ j=\overline{1,N},$$

$$F_r(\Delta_N) = \sum_{k=1}^{m} X_r(\theta_r)\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r} X_r^{-1}(\tau)\left[\varphi_k(\tau)\sum_{p=1}^{m} M_{k,p}(\Delta_N)g_p(f,\Delta_N) + f(\tau)\right]d\tau,$$

Then from (12) we get

$$\lim_{t\to\theta_r-0} u_r(t) = \sum_{j=1}^{N+1} D_{r,j}(\Delta_N)\lambda_j + \sum_{j=1}^{N} E_{r,j}(\Delta_N)\lambda_{j+1} + F_r(\Delta_N). \qquad (13)$$

Substituting the right-hand side of (13) into the boundary condition (5) and conditions of matching solution (6), we have the following system of linear algebraic equations with respect to parameters λ_r, $r=\overline{1,N+1}$:

$$[B + CD_{N+1,1}(\Delta_N)]\lambda_1 + \sum_{j=2}^{N} CD_{N+1,j}(\Delta_N)\lambda_j + C[I + D_{N+1,N+1}(\Delta_N)]\lambda_{N+1} +$$
$$+\sum_{j=1}^{N} CE_{N+1,j}(\Delta_N)\lambda_{j+1} = d - CF_{N+1}(\Delta_N), \qquad (14)$$

$$[I + D_{p,p}(\Delta_N)]\lambda_p - [I - D_{p,p+1}(\Delta_N)]\lambda_{p+1} + \sum_{j=1}^{N} E_{p,j}(\Delta_N)\lambda_{j+1} = -F_p(\Delta_N),\ \ p=\overline{1,N}. \qquad (15)$$

Denoting by $Q_*(\Delta_N)$ the matrix corresponding to the left-hand side of the system of equations (14) and (15), we get

$$Q_*(\Delta_N)\lambda = -F_*(\Delta_N), \quad \lambda \in R^{n(N+1)}, \tag{16}$$

where $F_*(\Delta_N) = \left(-d + CF_{N+1}(\Delta_N), F_1(\Delta_N), \dots, F_N(\Delta_N)\right)$.

It is not difficult to establish that the solvability of the boundary value problems (6) and (7) is equivalent to the solvability of the system (16). The solution of the system (16) is a vector $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_{N+1}^*) \in R^{n(N+1)}$ consists of the values of the solutions of the original problems (6) and (7) in the initial points of subintervals, i.e. $\lambda_r^* = x^*(\theta_{r-1})$, $r = \overline{1, N+1}$.

Further we consider the Cauchy problems for ordinary differential equations on subintervals

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + P(t), \quad z(\theta_{r-1}) = 0, \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r], \quad r = \overline{1, N+1}, \tag{17}$$

where $P(t)$ is either $(n \times n)$ matrix, or n vector, both continuous on $[\theta_{r-1}, \theta_r]$, $r = \overline{1, N+1}$. Consequently, the solution to problem (17) is a square matrix or a vector of dimension n. Denote by $a(P, t)$ the solution to the Cauchy problem (17). Obviously,

$$a(P,t) = X_r(t) \int_{\theta_{r-1}}^{t} X_r^{-1}(\tau) P(\tau) d\tau, \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r],$$

where $X_r(t)$ is a fundamental matrix of differential equation (17) on the r-th interval.

Numerical implementation of the parametrization method. We offer the following numerical implementation of the parametrization method. The algorithm is based on the Bulirsch-Stoer method to solve the Cauchy problems for ordinary differential equations and it is based on Simpson's method for estimation of the definite integrals.

1. Suppose we have a partition: $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_N < \theta_{N+1} = T$. Divide each r-th interval $[\theta_{r-1}, \theta_r]$, $r = \overline{1, N+1}$, into N_r parts with step $h_r = (\theta_r - \theta_{r-1})/N_r$. Assume on each interval $[\theta_{r-1}, \theta_r]$ the variable $\hat{\theta}$ takes its discrete values: $\hat{\theta} = \theta_{r-1}$, $\hat{\theta} = \theta_{r-1} + h_r, \dots$, $\hat{\theta} = \theta_{r-1} + (N_r - 1)h_r$, $\hat{\theta} = \theta_r$, and denote by $\{\theta_{r-1}, \theta_r\}$ the set of such points.

2. Using the Bulirsch-Stoer method, we find the numerical solutions to Cauchy problems (17) and define the values of $(n \times n)$ matrices $a_r^{h_r}(\varphi_k, \hat{\theta})$ on the set $\{\theta_{r-1}, \theta_r\}$, $r = \overline{1, N+1}$, $k = \overline{1, m}$.

3. Using the values of $(n \times n)$ matrices $\psi_k(s)$ and $a_r^{h_r}(\varphi_k, \hat{\theta})$ on $\{\theta_{r-1}, \theta_r\}$ and Simpson's method, we calculate the $(n \times n)$ matrices

$$\hat{\psi}_{p,r}^{h_r}(\varphi_k) = \int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r} \psi_p(\tau) a_r^{h_r}(\varphi_k, \tau) d\tau, \quad p,k = \overline{1,m}, \quad r = \overline{1, N+1}.$$

Summing up the matrices $\hat{\psi}_{p,r}^{h_r}(\varphi_k)$ over r, we find the $(n \times n)$ matrices $G_{p,k}^{\tilde{h}}(\Delta_N) = \sum_{r=1}^{N+1} \hat{\psi}_{p,r}^{h_r}(\varphi_k)$, where $\tilde{h} = (h_1, h_2, \dots, h_{N+1}) \in R^n$. Using them, we compose the $nm \times nm$ matrix $G^{\tilde{h}}(\Delta_N) = \left(G_{p,k}^{\tilde{h}}(\Delta_N)\right)$, $p, k = \overline{1, m}$. Check the invertibility of matrix $[I - G^{\tilde{h}}(\Delta_N)]: R^{nm} \to R^{nm}$.

If this matrix is invertible, we find $[I - G^{\tilde{h}}(\Delta_N)]^{-1} = \left(M_{p,k}^{\tilde{h}}(\Delta_N)\right)$, $p, k = \overline{1, m}$. If it has no inverse, then we take a new partition. In particular, each subinterval can be divided into two.

4. Solving the Cauchy problems for ordinary differential equations

$$\frac{dz}{dt} = A_0(t)z + A_i(t), \quad z(\theta_{r-1}) = 0, \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r], \quad i = \overline{0,N},$$

$$\frac{dz}{dt} = A_0(t)z + f(t), \quad z(\theta_{r-1}) = 0, \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r], \quad r = \overline{1,N+1},$$

by using again the Bulirsch-Stoer method, we find the values of $(n \times n)$ matrices $a_r(A_0, \hat{\theta})$, $a_r(A_i, \hat{\theta})$, $i = \overline{1,N}$, and n vector $a_r(f, \hat{\theta})$ on $\{\theta_{r-1}, \theta_r\}$, $r = \overline{1,N+1}$.

5. Applying Simpson's method on the set $\{\theta_{r-1}, \theta_r\}$, we evaluate the definite integrals

$$\hat{\psi}_{p,r}^{h_r} = \int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r} \psi_p(s)ds, \quad \hat{\psi}_{p,r}^{h_r}(A_i) = \int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r} \psi_p(\tau) a_r^{h_r}(A_i, \tau)\, d\tau, \quad i = \overline{0,N},$$

$$\hat{\psi}_{p,r}^{h_r}(f) = \int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r} \psi_p(\tau) a_r^{h_r}(f, \tau)\, d\tau, \quad p = \overline{1,m}, \quad r = \overline{1,N+1}.$$

By the equalities

$$V_{p,r}^{\tilde{h}}(\Delta_N) = \hat{\psi}_{p,r}^{h_r}(A_0) + \sum_{j=1}^{N+1} \sum_{k=1}^{m} \hat{\psi}_{p,j}^{h_j}(\varphi_k) \cdot \hat{\psi}_{p,r}^{h_r}, \quad r = \overline{1,N+1},$$

$$W_p^{\tilde{h}}(A_i, \Delta_N) = \sum_{r=1}^{N+1} \hat{\psi}_{p,r}^{h_r}(A_i), \ i = \overline{1,N}, \quad g_p^{\tilde{h}}(f, \Delta_N) = \sum_{r=1}^{N+1} \hat{\psi}_{p,r}^{h_r}(f), \quad p = \overline{1,m},$$

we define the $(n \times n)$ matrices $V_{p,r}^{\tilde{h}}(\Delta_N)$, $r = \overline{1,N+1}$, $W_p^{\tilde{h}}(A_i, \Delta_N)$, $i = \overline{1,N}$, and n vectors $g_p^{\tilde{h}}(f, \Delta_N)$, respectively, $p = \overline{1,m}$.

6. Construct the system of linear algebraic equations with respect to parameters

$$Q_*^{\tilde{h}}(\Delta_N)\lambda = -F_*^{\tilde{h}}(\Delta_N), \quad \lambda \in R^{n(N+1)}, \tag{18}$$

The elements of matrix $Q_*^{\tilde{h}}(\Delta_N)$ and vector $F_*^{\tilde{h}}(\Delta_N) = \left(-d + CF_{N+1}^{\tilde{h}}(\Delta_N), F_1^{\tilde{h}}(\Delta_N), \dots, F_N^{\tilde{h}}(\Delta_N)\right)$ are defined by the equalities $D_{r,j}(\Delta_N) = \sum_{k=1}^{m} a_r^{h_r}(\varphi_k, \theta_r) \left[\sum_{p=1}^{m} M_{k,p}^{\tilde{h}}(\Delta_N) V_{p,j}^{\tilde{h}}(\Delta_N) + \hat{\psi}_{p,j}^{h_j}\right]$, $j \neq r$, $r, j = \overline{1,N+1}$,

$$D_{r,r}^{\tilde{h}}(\Delta_N) = \sum_{k=1}^{m} a_r^{h_r}(\varphi_k, \theta_r)\left[\sum_{p=1}^{m} M_{k,p}^{\tilde{h}}(\Delta_N) V_{p,r}^{\tilde{h}}(\Delta_N) + \hat{\psi}_{p,r}^{h_r}\right] + a_r^{h_r}(A_0, \theta_r),$$

$$E_{r,j}^{\tilde{h}}(\Delta_N) = \sum_{k=1}^{m} a_r^{h_r}(\varphi_k, \theta_r) \sum_{p=1}^{m} M_{k,p}^{\tilde{h}}(\Delta_N) W_{p,j}^{\tilde{h}}(\Delta_N) + a_r^{h_r}(A_j, \theta_r), \ j = \overline{1,N},$$

$$F_r^{\tilde{h}}(\Delta_N) = \sum_{k=1}^{m} a_r^{h_r}(\varphi_k, \theta_r) \sum_{p=1}^{m} M_{k,p}^{\tilde{h}}(\Delta_N) g_p^{\tilde{h}}(\Delta_N) + a_r^{h_r}(f, \theta_r), \ r = \overline{1,N+1}.$$

Solving the system (18), we find $\lambda^{\tilde{h}}$. As noted above, the elements of $\lambda^{\tilde{h}}=(\lambda_1^{\tilde{h}}, \lambda_2^{\tilde{h}}, \dots, \lambda_{N+1}^{\tilde{h}})$ are the values of approximate solution to problems (1) and (2) in the starting points of subintervals: $x^{\tilde{h}_r}(\theta_{r-1}) = \lambda_r^{\tilde{h}}$, $r = \overline{1,N+1}$.

7. To define the values of approximate solution at the remaining points of set $\{\theta_{r-1}, \theta_r\}$, we first find

$$\mu_k^{\tilde{h}} = \sum_{j=1}^{N+1}\left(\sum_{p=1}^{m} M_{k,p}^{\tilde{h}}(\Delta_N) V_{p,j}^{\tilde{h}}(\Delta_N)\right)\lambda_j^{\tilde{h}} + \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{p=1}^{m} M_{k,p}^{\tilde{h}}(\Delta_N) W_{p,j}^{\tilde{h}}(\Delta_N)\right)\lambda_{j+1}^{\tilde{h}} +$$

$$+\sum_{p=1}^{m} M_{k,p}^{\tilde{h}}(\Delta_N) g_p^{\tilde{h}}(f, \Delta_N), \quad k = \overline{1,m},$$

and then solve the Cauchy problems

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \mathcal{F}^{\tilde{h}}(t), \qquad x(\theta_{r-1}) = \lambda_r^{\tilde{h}}, \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r], \quad r = \overline{1,N+1},$$

where $\mathcal{F}^{\tilde{k}}(t)=\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\left[\mu_k^{\tilde{k}}+\sum_{j=1}^{N+1}\hat{\psi}_{p,j}^{h_j}\lambda_j^{\tilde{k}}\right]+\sum_{i=1}^{N}A_i(t)\lambda_{i+1}^{\tilde{k}}+f(t)$.

And the solutions to Cauchy problems are found by the Bulirsch-Stoer method. Thus, the algorithm allows us to find the numerical solution to the problems (1) and (2).

To illustrate the proposed approach for the numerical solving linear boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations (1) and (2) on the basis of the parameterization method, let us consider the following example.

Example. We consider linear boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations

$$\frac{dx}{dt}=A_0(t)x+\int_0^T\varphi_1(t)\psi_1(s)x(s)ds+A_1(t)x(\theta_1)+f(t),\ t\in(0,T), \tag{19}$$

$$Bx(0)+Cx(T)=d,\quad d\in R^2,\quad x\in R^2. \tag{20}$$

Here $\theta_0=0, \theta_1=\frac{1}{2}, \theta_2=T=1,\quad A_0(t)=\begin{pmatrix}\sin t & 1\\ t^2 & \cos t\end{pmatrix},\ A_1(t)=\begin{pmatrix}4 & t\\ e^t & 0\end{pmatrix},$

$$\varphi_1(t)=\begin{pmatrix}t+1 & t^3\\ 0 & t^2\end{pmatrix},\quad \psi_1(s)=\begin{pmatrix}s^2 & s\\ s-3 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 1 & -3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 7\end{pmatrix},$$

$$d=\begin{pmatrix}-17\\ -32\end{pmatrix},\ f(t)=\begin{pmatrix}\frac{362t}{15}+8\sin t-6t^2\sin t-t^3\sin t-t^2-\frac{247t^3}{60}+\frac{422}{15}\\ 8t+\frac{51e^t}{8}-4t^2\cos t+\frac{233t^2}{60}-6t^4-t^5+7t\cos t-7\end{pmatrix}.$$

We use the numerical implementation of the algorithm. The accuracy of the solution depends on the accuracy of solving the Cauchy problem on subintervals and evaluating definite integrals. We provide the results of the numerical implementation of the algorithm by partitioning the subintervals [0, 0.5] and [0.5, 1] with step h = 0.05.

The exact solution of problems (19) and (20) is $x^*(t)=\begin{pmatrix}t^3+6t^2-8\\ 4t^2-7t\end{pmatrix}$.

Table 1 provides the $x^*(t_k)$, $k=\overline{0,20}$, exact solution values and $\tilde{x}(t_k), k=\overline{0,20}$, numerical solution values.

Table 1. Results received by using MathCad15

t	$\tilde{x}_1(t)$	$x_1^*(t)$	$\tilde{x}_2(t)$	$x_2^*(t)$
0	-8.00000313	-8	0.00000045	0
0.05	-7.98487798	-7.984875	-0.33999959	-0.34
0.1	-7.93900282	-7.939	-0.65999964	-0.66
0.15	-7.86162766	-7.861625	-0.95999969	-0.96
0.2	-7.75200248	-7.752	-1.23999974	-1.24
0.25	-7.6093773	-7.609375	-1.49999981	-1.5
0.3	-7.4330021	-7.433	-1.73999988	-1.74
0.35	-7.22212689	-7.222125	-1.95999995	-1.96
0.4	-6.97600167	-6.976	-2.16000004	-2.16
0.45	-6.69387643	-6.693875	-2.34000012	-2.34
0.5	-6.37500117	-6.375	-2.50000021	-2.5
0.55	-6.01862589	-6.018625	-2.64000031	-2.64
0.6	-5.62400059	-5.624	-2.7600004	-2.76
0.65	-5.19037526	-5.190375	-2.86000049	-2.86
0.7	-4.7169999	-4.717	-2.94000058	-2.94
0.75	-4.20312451	-4.203125	-3.00000066	-3
0.8	-3.64799908	-3.648	-3.04000072	-3.04
0.85	-3.05087361	-3.050875	-3.06000077	-3.06
0.9	-2.41099809	-2.411	-3.06000078	-3.06
0.95	-1.72762251	-1.727625	-3.04000077	-3.04
1	-0.99999687	-1	-3.0000007	-3

For the difference of the corresponding values of the exact and constructed solutions of the problem the following estimate is true:

$$\max_{j=\overline{0,20}} \|x^*(t_j) - \tilde{x}(t_j)\| < 0.000003.$$

Conclusion. In this work, we propose a numerical implementation of parametrization method for finding solutions to linear boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations. Using the parametrization method, we reduce the considered problem to the equivalent boundary value problem with parameters. The unknown functions are determined from the Cauchy problems for the system of ordinary differential equations, and the introduced parameters are determined from the system of algebraic equations. A numerical algorithm for finding solution to the considered problem is constructed. The Cauchy problem is solved by the Bulirsch-Stoer method. The example illustrating the numerical algorithm of parametrization method is provided.

REFERENCES

1. Nakhushev A.M. Loaded equations and their applications. -M.: Nauka, 2012. -232 p. [in Russian].
2. Nakhushev A.M. Equations of mathematical biology. -M.: Vyshaiya shkola, 1995. -205 p. [in Russian].
3. Dzhenaliev M.T. Loaded equations with periodic boundary conditions // Differential equations. -2001. -V. 37, No. 1. - P. 51–57.
4. Abdullaev V.M., Aida-zade K.R. Numerical method of solution to loaded nonlocal boundary value problems for ordinary differential equations // Comp. Math. and Mathematical Physics. -2014. –V.54, No 7. –P. 1096–1109.
5. Aida-zade K.R., Abdullaev V.M. On the numerical solution to loaded systems of ordinary differential equations with non-separated multipoint and integral conditions // Numerical Analysis and Applications. -2014. -V. 7, No. 1. - P. 1-14.
6. Assanova A. T., Imanchiyev A. E., Kadirbayeva Zh. M. Numerical solution of systems of loaded ordinary differential equations with multipoint conditions // Comp. Math. and Mathematical Physics. –2018. - V.58, No.4. – P.508–516.
7. Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M. On the numerical algorithms of parametrization method for solving a two-point boundary-value problem for impulsive systems of loaded differential equations // Computational and Applied Mathematics. - 2018. -V. 37, No 4. - P. 4966-4976.
8. Assanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M. Numerical implementation of solving a boundary value problem for a system of loaded differential equations with parameter // news of the nas rk. phys.-math. series. - 2019. –v 3, no 325. -p. 77-84.
9. Dzhumabaev D.S. Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations // Math. Methods in the Applied Sciences. – 2018. –V. 41, No 4. –P. 1439-1462.
10. Dzhumabaev D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems, Journal of Comp. and Applied Math. -2018. –V.327, No 1. -P. 79-108.
11. Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys. -1989. -V. 29, No 1. -P. 34-46.
12. Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the well-posedness of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations // Differential equations. -2010. -V. 46, No 4. -P.553-567.
13. Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the unique solvability of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations // Differential Equations. -2013. -V. 49, No 9. -P.1087-1102.

14. Dzhumabaev D.S., On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations // J. Comput. Appl. Math. -2016. –V.294. –P. 342-357.
15. Dzhumabaev D.S., Usmanov K.I. On the correct solvability of a linear boundary value problem for systems of the integro-differential equations with close kernels // Math. journal. -2010. -V. 10, No 2(36). -P. 39-47. [in Russian].

Э.А. Бакирова, Ж.М. Кадирбаева

Жүктелген дифференциалдық және Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін шеттік есептерді сандық шешу

Аңдатпа: Мақалада жүктелген дифференциалдық және Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін шеттік есептерді шешудің есептеу әдісі ұсынылған. Жүктелген дифференциалдық және Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін есептерді шешу енгізілген қосымша параметрлерге қатысты сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешуге келтіріледі. Ішкі интервалдарда Коши есебін шешу үшін Булирш-Штёр әдісі мен құрылған жүйені шешуге негізделген есептің шешімін табудың сандық әдісі берілген. Нәтиже мысалмен сипатталады.

Түйінді сөздер: интегралдық-дифференциалдық теңдеу, жүктелген дифференциалдық теңдеу, параметрлеу әдісі, сандық әдіс

Э.А. Бакирова, Ж.М. Кадирбаева

Численное решение краевых задач для нагруженных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма

Аннотация. В статье представлен вычислительный метод решения краевых задач для нагруженных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма. Решение задачи для нагруженных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно введенных дополнительных параметров. Предложен численный метод нахождения решения задачи, основанный на решении построенной системы и метода Булирша-Штёра для решения задачи Коши на подинтервалах. Результат иллюстрируется примером.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, нагруженное дифференциальное уравнение, метод параметризации, численный метод.

Сведения об авторах:

Бакирова Эльмира Айнабековна, к.ф.-м.н., ВНС отдела дифференциальных уравнений Института математики и математического моделирования.

Кадирбаева Жазира Муратбековна, к.ф.-м.н., ассистент-профессор кафедры математического и компьютерного моделирования Международного университета информационных технологий.

About authors:

Elmira A. Bakirova, cand. of ph.-math. sci., Leading scientific researcher of the Department of Differential Equations of the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling.

Zhazira M. Kadirbayeva, cand. of ph.-math. sci., assistant-professor, Mathematical and Computational modeling Department, International Information Technology University.

УДК 517.929.7.

Narkesh B. Iskakova[1,*], Nurgul T. Orumbayeva[2], Nazira Nurzhuma[1]

[1] Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan
[2] E.A.Buketov University of Karaganda, Karaganda, Kazakhstan

A PERIODIC BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SYSTEM OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A DELAY ARGUMENT

Abstract. *In the paper, a periodic boundary value problem for a system of linear differential equations with a delay argument is considered. On the basis of the parameterization method, a two-parametric family of algorithms for finding a solution of the periodic boundary value problem is offered.*

Key words: *parameterization method, differential equations, delay argument, algorithm, unique solution*

In various applications, there has been an increasing interest in the theory of linear boundary value problems for differential equations with a delay argument. Due to applications in physics, biology, epidemiology, and other fields, most of the literature on delay differential equations has been focused on the existence of a periodic solution, oscillations, etc. An analysis of the literature indicates that in recent decades, boundary value problems for delay differential equations have been extensively studied; see, for example, [1-4].

We consider the periodic boundary value problem for the system of linear differential equations with a delay argument

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau) + f(t), \quad t \in [0,T], \quad x \in R^n, \tag{1}$$

$$x(z) = diag[x(0)] \cdot \varphi(z), \quad z \in [-\tau, 0], \tag{2}$$

$$x(0) = x(T), \tag{3}$$

where the matrices $A(t), B(t)$, and the vector function $f(t)$ are continuous on $[0,T]$, $\varphi(t)$ is a continuous vector function given on the initial set $[-\tau,0]$, such that $\varphi_i(0)=1,\ i=\overline{1,n}$, $\tau>0$ is a constant delay, $\|A(t)\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1}^{n} \|a_{ij}(t)\| \le \alpha$, $\|B(t)\| \le \beta$, $\alpha, \beta - const.$, $\|x(t)\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i|$.

A solution of problems (1)-(3) is a vector-function $x(t)$ continuous on $[-\tau,T]$ and continuously differentiable on $[-\tau,0)\cup(0,T]$ that satisfies the system of differential equations (1) on $[0,T]$, coincides with the function $diag[x(0)]\cdot\varphi(t)$ on $[-\tau,0]$, and have the values at the points $t=0, t=T$ for which equality (3) is valid.

Using the parameterization method [5], a partition of the interval $[-\tau,T)$ is performed with step size $h=\tau/l$: $N\tau=T, l\in \mathrm{N}$

$$[-\tau,0)\cup[0,T) = \bigcup_{s=l}^{1}[-t_s,-t_{s-1}) \cup \bigcup_{r=1}^{lN}[t_{r-1},t_r),$$

where $t_0=0$, $-t_s=-sh,\ s=\overline{1,l}$, $t_r=rh,\ r=\overline{1,lN}$.

The restriction of the function $x(t)$ to the r-th subinterval $[t_{r-1},t_r)$ is denoted by $x_r(t),\ r=\overline{1,lN}$. By $\varphi_s(t)$, $s=\overline{1,l}$, we denote the restrictions of the initial function $\varphi(t)$ to the s-th subinterval $[-t_{l-(s-1)},-t_{l-s})$. If the argument $t-\tau$ is changed on $[t_{r-1-l},t_{r-l})$, then

$$[t_{r-1-l}, t_{r-l}) = \begin{cases} [t_{r-1-l}, t_{r-l}), & \text{if } \ r-1-l \geq 0,\, r-l \geq 1, \\ [-t_{l-(r-1)}, -t_{l-r}), & \text{if } \ r-1-l < 0,\, r-l < 1, \end{cases}$$

therefore, the function $x(t-\tau)$ is the same as the function $x_{r-l}(t-\tau)$.

Introducing the parameters $\lambda_r = x(t_{r-1})$ and making the substitution the functions $u_r(t) = x(t) - \lambda_r$ on each r-th subinterval, we get the boundary-value problem with parameters:

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)\big(u_r(t) + \lambda_r\big) + B(t)\Phi_r(t-\tau)\lambda_1 + f(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r),\ r = \overline{1, l}, \tag{4}$$

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)\big(u_r(t) + \lambda_r\big) + B(t)\big(u_{r-l}(t-\tau) + \lambda_{r-l}\big) + f(t), \quad r = \overline{l+1, lN}, \tag{5}$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \ r = \overline{1, lN}, \tag{6}$$

$$\lambda_1 = \lambda_{lN} + \lim_{t \to T-0} u_{lN}(t), \tag{7}$$

$$\lambda_s + \lim_{t \to t_s - 0} u_s(t) = \lambda_{s+1}, \quad s = \overline{1, lN-1}, \tag{8}$$

where $\Phi_r(t-\tau)$ is an $(n \times n)$ matrix of the form $diag[\varphi_r(t-\tau)]$, $r = \overline{1, l}$.

If $x(t)$ is a solution of problem (1)-(3), then the system of pairs $\big(\lambda_r, u_r(t)\big)$, $r = \overline{1, lN}$, is a solution to problems (4)-(8). Conversely, if the system $\big(\tilde{\lambda}_r, \tilde{u}_r(t)\big)$, $r = \overline{1, lN}$, is a solution of problems (4)-(8), then the function

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} \tilde{\lambda}_r + \tilde{u}_r(t),\ t \in [t_{r-1}, t_r),\ r = \overline{1, lN}, \\ \tilde{\lambda}_{lN} + \lim\limits_{t \to T-0} \tilde{u}_{lN}(t),\ t = T, \end{cases}$$

is a solution of problem (1)-(3).

In problems (4)-(8), initial conditions (6) appeared that allow us to determine unknown functions from the Volterra integral equations of the 2-nd kind. The functions $u_r(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, l}$, for a fixed parameter λ_r, are defined from the equation

$$u_r(t) = \int_{t_{r-1}}^{t} A(s)[u_r(s) + \lambda_r]ds + \int_{t_{r-1}}^{t} B(s)\Phi_r(s-\tau)ds + \int_{t_{r-1}}^{t} f(s)ds, \tag{9}$$

and the function $u_r(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{l+1, lN}$, for a fixed $\lambda_r, \lambda_{r-l}, u_{r-l}(t-\tau)$, is defined from the equation

$$u_r(t) = \int_{t_{r-1}}^{t} A(s)[u_r(s) + \lambda_r]ds + \int_{t_{r-1}}^{t} B(s)[u_{r-l}(s-\tau) + \lambda_{r-l}]ds + \int_{t_{r-1}}^{t} f(s)ds, \tag{10}$$

where the pair $\big(\lambda_r, u_r(t)\big)$, $r = \overline{1, l}$, satisfies equation (9), and the pairs $(\lambda_{r-l}, u_{r-l}(t))$, $r = l+1, l+2, \ldots, l(N-1)$, satisfy the equations

$$u_{r-l}(t) = \int_{t_{r-l-1}}^{t} A(s)[u_{r-l}(s) + \lambda_{r-l}]ds + \int_{t_{r-l-1}}^{t} B(s)[u_{r-2l}(s-\tau) + \lambda_{r-2l}]ds + \int_{t_{r-l-1}}^{t} f(s)ds, \qquad t \in [t_{r-l-1}, t_{r-l}).$$

In (9), replacing $u_r(s)$ by the right-hand side of this equation, and repeating the process $\nu\ (\nu = 1, 2, \ldots)$ times, we get the following representation of the function $u_r(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, l}$:

$$u_r(t) = D_{\nu r}(t, 0)\lambda_r + E_{\nu r}(t, 0)\lambda_1 + F_{\nu r}(t, f_0) + G_{\nu r}(t, u_{r,0}). \tag{11}$$

In the same way, from (10) we get the following representation of $u_{il+j}(t)$, $i=\overline{1,N-1}$, $j=\overline{1,l}$,:

$$u_{il+j}(t)=D_{\nu,il+j}(t,0)\lambda_{il+j}+P^{i}_{\nu,il+j}[t,E_{\nu,il+j}(t,i\tau)]\cdot\lambda_1+$$
$$+\sum_{k=1}^{i}P^{k-1}_{\nu,il+j}[t,H_{\nu,il+j}(t,(k-1)\tau)+P_{\nu,il+j}[t,D_{\nu,il+j}(t,k\tau)]]\cdot\lambda_{(i-k)l+j}+ \tag{12}$$
$$+\sum_{k=0}^{i}P^{k-1}_{\nu,il+j}[t,F_{\nu,il+j}(t,f_{k\tau})+G_{\nu,il+j}(t,u_{(i-k)l+j,k\tau})],\ t\in[t_{il+j-1},t_{il+j}),$$

where

$$D_{\nu,il+j}(t,m\tau)=\sum_{k=0}^{\nu-1}\int_{t_{il+j-1}}^{t}A(s_1-m\tau)\ldots\int_{t_{il+j-1}}^{s_k}A(s_{k+1}-m\tau)ds_{k+1}..ds_1,$$

$$H_{\nu,il+j}(t,m\tau)=\int_{t_{il+j-1}}^{t}B(s_1-m\tau)ds_1+\sum_{k=1}^{\nu-1}\int_{t_{il+j-1}}^{t}A(s_1-m\tau)\ldots$$
$$\ldots\int_{t_{il+j-1}}^{s_{k-1}}A(s_k-m\tau)\int_{t_{il+j-1}}^{s_k}B(s_{k+1}-m\tau)ds_{k+1}\,ds_k\ldots ds_1$$

$$F_{\nu,il+j}(t,f_{m\tau})=\int_{t_{il+j-1}}^{t}f(s_1-m\tau)ds_1+\sum_{k=1}^{\nu-1}\int_{t_{il+j-1}}^{t}A(s_1-m\tau)\ldots$$
$$\ldots\int_{t_{il+j-1}}^{s_{k-1}}A(s_k-m\tau)\int_{t_{il+j-1}}^{s_k}f(s_{k+1}-m\tau)ds_{k+1}\,ds_k\ldots ds_1,$$

$$G_{\nu,il+j}(t,u_{il+j,m\tau})=\int_{t_{il+j-1}}^{t}A(s_1-m\tau)\ldots\int_{t_{il+j-1}}^{s_{\nu-2}}A(s_{\nu-1}-m\tau)\int_{t_{il+j-1}}^{s_{\nu-1}}A(s_{\nu-1}-m\tau)u_{il+j}(s_\nu)ds_\nu ds_{\nu-1}..ds_1,$$

$$P_{\nu,il+j}(t,u_{(i-1)l+j,m\tau})=\int_{t_{il+j-1}}^{t}B(s_1-(m-1)\tau)u_{(i-1)l+j}(s_1-m\tau)ds_1+\sum_{k=1}^{\nu-1}\int_{t_{il+j-1}}^{t}A(s_1-(m-1)\tau)\ \ldots$$
$$\ldots\int_{t_{il+j-1}}^{s_{k-1}}A(s_k-(m-1)\tau)\int_{t_{il+j-1}}^{s_k}B(s_{k+1}-(m-1)\tau)u_{(i-1)l+j}(s_{k+1}-m\tau)ds_{k+1}\,ds_k\ldots ds_1,$$

$$E_{\nu,il+j}(t,m\tau)=\int_{t_{il+j-1}}^{t}B(s_1-m\tau)\Phi_j(s_1-(m+1)\tau)ds_1+\sum_{k=1}^{\nu-1}\int_{t_{il+j-1}}^{t}A(s_1-m\tau)\ \ldots$$
$$\ldots\int_{t_{il+j-1}}^{s_{k-1}}A(s_k-m\tau)\int_{t_{il+j-1}}^{s_k}B(s_{k+1}-m\tau)\Phi_j(s_{k+1}-(m+1)\tau)ds_{k+1}\,ds_k\ldots ds_1,$$

$$m=\overline{0,i},\ i=\overline{1,N-1},\ j=\overline{1,l},\ P^0[t,y]=y,\ P^k[t,y]=P[t,P^{k-1}[t,y]].$$

In (11) and (12), passing to the limits and substituting them in the boundary conditions (7) and the continuity conditions (9), we obtain a system of linear algebraic equations in unknown parameters $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{lN}$. This system can be written in the matrix form

$$Q_\nu(l)\cdot\lambda=-\tilde{F}_\nu(f,l)-\tilde{G}_\nu(u,l), \tag{13}$$

here $Q_\nu(l)$ is an ($nlN \times nlN$) matrix composed of the coefficients of unknown parameters

$$\lambda_r,\, r=\overline{1,lN},\quad \lambda=\left(\lambda_1,\ \lambda_2,\ldots,\lambda_{lN}\right)' \in R^{nlN},$$

$$\widetilde{F}_\nu(l)=\left(-\widetilde{F}_{\nu,lN}(T),\widetilde{F}_{\nu 1}(t_1),\widetilde{F}_{\nu 2}(t_2),\ldots,\widetilde{F}_{\nu,lN-1}(t_{lN-1})\right)' \in R^{nlN},$$

$$\widetilde{G}_\nu(u,l)=\left(-\widetilde{G}_{\nu,lN}(u,T),\widetilde{G}_{\nu 1}(u,t_1),\widetilde{G}_{\nu 2}(u,t_2),\ldots,\widetilde{G}_{\nu,lN-1}(u,t_{lN-1})\right)' \in R^{nlN},$$

$$\widetilde{F}_{\nu,il+j}(t_{il+j})=\sum_{k=0}^{i} P^k_{\nu,il+j}\left[t_{il+j},F_{\nu,il+j}\left(t,f_{k\tau}\right)\right],$$

$$\widetilde{G}_{\nu,il+j}(u,t_{il+j})=\sum_{k=0}^{i} P^k_{\nu,il+j}\left[t_{il+j},G_{\nu,il+j}\left(t,u_{(i-k)l+j,k\tau}\right)\right],\ i=\overline{0,N-1},\ \ j=\overline{1,l}\,.$$

Thus, we have the system of equations (9), (10) and (13) for finding the pair $\left(\lambda,u[t]\right)$, where $\lambda=\left(\lambda_1,\ \lambda_2,\ldots,\lambda_{lN}\right)$, $u[t]=\left(u_1(t),\ u_2(t),\ldots,u_{lN}(t)\right)$.

We find a solution $\left(\lambda,u[t]\right)$ of problems (4)-(8) as the limit of the sequence $\left(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t]\right)$, $k=0,1,2,\ldots$, using the following algorithm:

Step 0. (a) Assuming that the matrix $Q_\nu(l)$ is invertible for some ν and l, the initial approximation for the parameter $\lambda^{(0)}=\left(\lambda_1{}^{(0)},\ \lambda_2{}^{(0)},\ldots,\lambda_{lN}{}^{(0)}\right)$ is determined from the equation $Q_\nu(l)\cdot\lambda=-\widetilde{F}_\nu(l)$, that is $\lambda^{(0)}=-[Q_\nu(l)]^{-1}\widetilde{F}_\nu(l)$;

(b) By solving the Cauchy problems (4) and (6) on $[t_{r-1},t_r)$ with $\lambda_r=\lambda_r^{(0)}$, we find $u_r^{(0)}(t)$, $r=\overline{1,l}$. Substituting $\lambda_r,\lambda_{r-l},u_{r-l}(t-\tau)$ in (5) by the corresponding values $\lambda_r^{(0)},\lambda_{r-l}^{(0)},u_{r-l}^{(0)}(t-\tau)$ and solving the Cauchy problems (5) and (6) on $[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{l+1,lN}$, we find $u_r^{(0)}(t)$, $r=\overline{l+1,lN}$.

Step 1. (a) Substituting $u_r^{(0)}(t)$ found above in the right-hand side of (13), we determine $\lambda^{(1)}$ from the equation $Q_\nu(l)\cdot\lambda=-\widetilde{F}_\nu(f,l)-\widetilde{G}_\nu(u^{(0)},l)$;

(b) on the interval $[t_{r-1},t_r)$, solving the Cauchy problems (4) and (6) with $\lambda_r=\lambda_r^{(1)}$, we find $u_r^{(1)}(t)$, $r=\overline{1,l}$. Substituting $\lambda_r,\lambda_{r-l},u_{r-l}(t-\tau)$ by $\lambda_r^{(1)},\lambda_{r-l}^{(1)},u_{r-l}^{(1)}(t-\tau)$, respectively, we solve the Cauchy problems (5) and (6) on the interval $[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{l+1,lN}$, and find $u_r^{(1)}(t)$, $r=\overline{l+1,lN}$.

And so on. Continuing the process, in the k–th step, we get a system of pairs $\left(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t]\right)$. Sufficient conditions for convergence and feasibility of the proposed algorithm is established.

Theorem 1. Let for some l, $l\in N$, and ν, $\nu\in N$ the matrix $Q_\nu(l)$: $RnlN\to RnlN$ be invertible and the inequalities

(a) $$\left\|[Q_\nu(l)]^{-1}\right\|\le\gamma_\nu(l);$$

(b) $$q_\nu(l)=\gamma_\nu(l)\frac{1}{\nu!}\left(\frac{\alpha\tau}{l}\right)^{\nu}\max_{i=\overline{0,N-1}}\sum_{\rho=0}^{i}\frac{1}{\rho!}\left(\frac{\beta\tau}{l}\sum_{k_1=0}^{\nu-1}\frac{1}{k_1!}\left(\frac{\alpha\tau}{l}\right)^{k_1}\right)^{\rho}\cdot P(l)<1,$$

hold, where

$$P(l)=\max\left\{\max_{1\le j\le l}\ \sup_{t\in[t_{j-1},t_j}\left\{e^{\frac{\alpha\tau}{l}}-1+\frac{\beta\tau}{l}\cdot e^{\frac{\alpha\tau}{l}}\left\|\Phi_j(t-(i+1)l)\right\|\right\}\right\}.$$

$$\max_{\substack{i=0,N-1,\\ j=1,l}} \sup_{t\in[t_{il+j-1},t_{il=j})} \left\{ e^{\frac{\alpha\tau}{l}} \sum_{k_1=0}^{i} \left(\frac{\beta\tau}{l} \cdot e^{\frac{\alpha\tau}{l}} \right)^{k_1} + e^{\frac{\alpha\tau}{l}} - 1 + \left(\frac{\beta\tau}{l} \cdot e^{\frac{\alpha\tau}{l}} \right)^{i+1} \left\| \Phi_j(t-(i+1)l) \right\| \right\}.$$

Then the sequence of pairs $\left(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t]\right)$ converges to a unique solution $\left(\lambda^{*}, u^{*}[t]\right)$ of the problem (4)-(8) as $k \to \infty$.

Due to the equivalence of problems (1)-(3) and (4)-(8), the following statement holds true.

Theorem 2. Let the conditions of Theorem 1 be fulfilled. Then problem (1)-(3) has a unique solution $x^{*}(t)$ and the estimate

$$\left\| x^{*}(t) - x^{(k)}(t) \right\| \le \gamma_\nu(l) \frac{(q_\nu(l))^k}{1-q_\nu(l)} \cdot \frac{1}{\nu!} \left(\frac{\alpha\tau}{l} \right)^{\nu} \times$$

$$\times \max_{i=0,N-1} \sum_{\rho=0}^{i} \frac{1}{\rho!} \left(\frac{\beta\tau}{l} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\alpha\tau}{l} \right)^{k} \right)^{\rho} \cdot M(l)(1+P(l)), \quad t \in [0,T],$$

is valid, where $x^{(k)}(t)$ is a function piecewise continuously differentiable on $[0,T]$, for which the function $\lambda_r^{(k)} + u_r^{(k)}(t)$, $r = \overline{1,lN}$, $k = 0,1,2,...$ is a restriction on $[t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,lN}$.

REFERENCES

1. ShuX.-B., Li-HongH., and LiY.-J., "Triple positive solutions for a class of boundary value problems for second-order neutral functional differential equations", *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 65:4 (2006), 825-840.
2. LiuY., "Periodic boundary value problems for first order functional differential equations with impulse", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 223:1 (2009), 27-39.
3. Feng M. Q., "Periodic solutions for prescribed mean curvature Lienard equation with a deviating argument", *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 13:3 (2012), 1216-1223.
4. WangH., "Positive Solution for a Class of Boundary Value Problems with Finite Delay", *Journal of Applied Mathematics: Hindawi Publishing Corporation*, Vol. 2012, Article ID 382392, 7 pages.
5. Dzhumabaev D.S., "Conditions the unique solvability of a linear boundary value problem for a ordinary differential equations", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 29:1 (1989), 34-46.

Dedicated to the bright memory of an outstanding scientist,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
our scientific supervisor Dzhumabaev Dulat Syzdykbekovich

Н.Б. Искакова, Н.Т. Орумбаева, Н. Нұржума

Кешігулі аргументі бар сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін периодтық шеттік есеп

Аңдатпа: Мақалада кешігулі аргументі бар сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін периодтық шеттік есеп қарастырылады. Параметризация әдісі негізінде периодтық шеттік есептің шешімін табу үшін алгоритмдердің екі параметрлік тобы ұсынылады.

Түйінді сөздер: параметризация әдісі, дифференциалдық теңдеулер, кешігулі аргумент, алгоритм, жалғыз шешім

Н.Б. Искакова, Н.Т. Орумбаева, Н. Нұржума

Периодическая краевая задача для системы линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

Аннотация. В статье рассматривается периодическая краевая задача для системы линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. На основе метода па-

раметризации предлагается двухпараметрическое семейство алгоритмов для нахождения решения периодической краевой задачи.

Ключевые слова: метод параметризации, дифференциальные уравнения, запаздывающий аргумент, алгоритм, единственное решение.

Сведения об авторах:

Искакова Наркеш Билаловна, к.ф.-м.н., и.о. ассоциированного профессора кафедры математики и математического моделирования Казахского Национального педагогического университета имени Абая.

Орумбаева Нургуль Тумарбековна, к.ф.-м.н., доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Карагандинского университета имени Е.А. Букетова.

Нұржума Назира, магистрант 2-го курса Казахского Национального педагогического университета имени Абая, специальность 7M05401-Математика.

About the authors:

Narkesh B. Iskakova, candidate of physical and mathematical Sciences, acting associate Professor, Department of mathematics and mathematical modeling, Abay Kazakh National pedagogical University.

Nurgul T. Orumbayeva, candidate of physical and mathematical Sciences, associate Professor, Department "Mathematical analysis and differential equations", E.A. Buketov University of Karaganda.

Nazira Nurzhuma, master's student of the 2nd year of Abay Kazakh National pedagogical University, specialty 7M05401-Mathematics.

ИНФОКОММУНИКАЦИОННЫЕ СЕТИ И КИБЕРБЕЗОПАСНОСТЬ

УДК 004.413.2

Алин Г.Т.

Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан

УПРАВЛЕНИЕ ПРОЕКТАМИ РАЗРАБОТКИ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ: ПРОЦЕСС РАЗРАБОТКИ WBS ПРОЕКТА

Аннотация: *в данной статье рассматриваются общие характеристики и основные технологии управления процессом формирования и разработки структуры работ проекта в области разработки программных продуктов. Определены современные подходы к управлению процессом разработки структуры работ проекта, рассмотрены возможные варианты, возникающие в процессе декомпозиции и выработки требований к WBS в контексте оптимального составления сметы и управления. В статье рассматривается необходимость оптимизации и анализа работ проекта для обеспечения конечного успеха в реализации проектов разработки программного обеспечения.*

Ключевые слова: *IT-проекты, оптимизации планирования, технологии управления проектами, декомпозиция структуры работ проекта.*

Введение

Планирование любого проекта – это определение того, «что» будет сделано, «как» будет сделано, «кто» будет заниматься деятельностью и «сколько» это будет стоить. В этом смысле планирование представляет собой процесс определения разбивки структуры работ проекта WBS («что»), разбивки организационной структуры OBS («кто»), разбивки структуры стоимости CBS («как») [4 с.89], исходя из заданных спецификаций и наконец, как только планирование завершено, планирование может быть выполнено, т.е. определяется SCHEDULING – «когда» это может быть сделано (рис. 1).

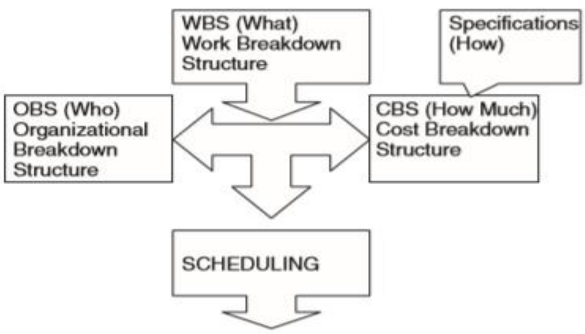


Рисунок 1 – Взаимодействие компонент WBS, OBS и CBS в процессе определения расписания SCHEDULING

Когда проекты просты и состоят из нескольких определенных видов деятельности, один человек может осознать общую структуру проекта без особых затруднений. К сожалению, большинство проектов, для которых готовятся официальные планы, как правило, определяются десятками, а то и сотнями или тысячами видов деятельности: чем больше проект, тем больше число видов деятельности и тем выше уровень детализации, который приходится выполнять менеджерам.

Разбивка структуры работ проекта WBS – «Что»

Когда план проекта состоит из множества заданий, часто рекомендуется организовать задания так, чтобы обеспечить связь между планом и информацией для его исполнителей с тем, чтобы обеспечить понимание различных аспектов плана проекта. Несмотря на то, что существует много способов организации плана, одной из распространенных практик является структура разбивки работ (WBS). WBS – это удобный метод рационального разложения сложности проекта на рабочие пакеты и элементарные задания. Некоторые фирмы предпочитают использовать свои стандарты для идентификации рабочих пакетов, общие для всех подобных проектов. Эти рабочие пакеты затем кодируются, чтобы можно было контролировать как их затраты, так и график их выполнения. Затем к заданиям применяется общая система финансового учета так, чтобы кодирование указывало на специфические факторы, например, тип используемого материала или физическое местоположение и т.п. Естественно, что чем дальше в WBS, тем больше гранулярность разложения и количество деталей. Независимо от средств, используемых для определения элементов, отдельные задания должны определяться для самого низкого уровня в иерархии или на самом высоком уровне детализации, который требуется для адекватного управления и контроля процесса выполнения проекта.

Используемый уровень детализации будет определяться потребностями планирования и исполнителей, просматривающих WBS. Например, если вы являетесь управляющим проекта, то вас больше всего интересует дата завершения проекта и смета, тогда как ваш исполнитель будет в первую очередь интересоваться информацией, относящейся конкретно к задаче, за которую он несет прямую ответственность. Обычно существует три основных типа WBS, а именно: Проектная WBS, Стандартная WBS и Контрактная WBS [4 с.93]. Проект WBS – это оперативный инструмент, обычно подготовленный для мониторинга и контроля работы (см. рисунок 2).

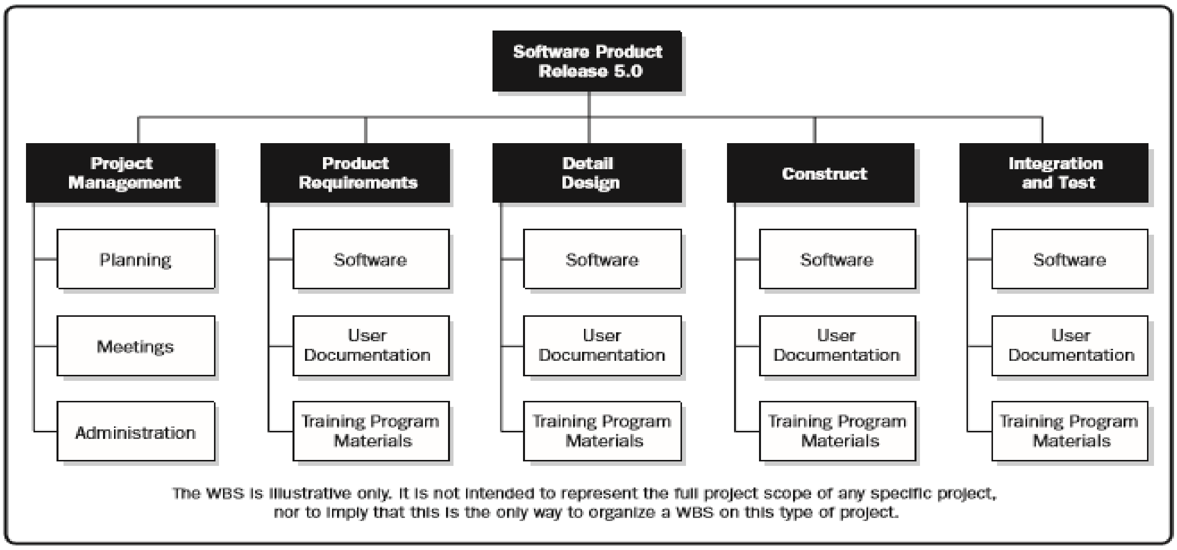


Рисунок 2 – Пример WBS проекта разработки программного продукта

Как правило, WBS является структурой разбивки действий, выполненных в прошлом для аналогичного проекта [5, с 125]: WBS в прошлом проекте может использоваться в качестве шаблона для нового. На рисунке 3 показаны наивысшие уровни образца шаблона WBS, который можно использовать для разработки сайта клиента.

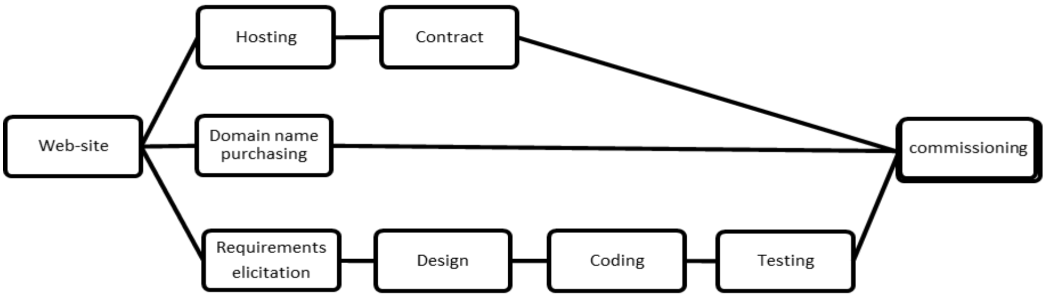


Рисунок 3 – Пример WBS проекта разработки web-сайта клиента

Затем контракт согласовывается между заказчиком и исполнителем. В нем необходимо представить разложение объема работ на основные элементы, которые будут использоваться для измерения прогресса, контроля проекта и уплаты контрактной цены. Он может содержать меньше деталей, чем проект WBS.

Подводя итог, можно сказать, что WBS является ориентированной на результат декомпозицией объема проекта [3 с.283] до тех пор, пока достаточный уровень детализации не позволит легко определить всю информацию, необходимую для выполнения и управления подробными заданиями. Еще одной рекомендацией для определения необходимого уровня детализации является рекомендация 8-80 рабочих часов, выделяемых для выполнения задания нижнего уровня, т.е. если задание требует менее 8 часов, то есть опасность микроменеджмента или, если задание требует более 80 часов, то рекомендуется продолжить его декомпозицию.

Разбивка организационной структуры OBS – «Кто»

После определения того, что необходимо сделать, необходимо определить все человеческие ресурсы, необходимые для выполнения проекта. В зависимости от части объема работ, проекту могут потребоваться инженерные навыки, возможности закупок, труд разработчиков (исполнителей), управленческий персонал и т.д. Структура разбивки организации OBS – это практический метод разложения объема людских ресурсов, необходимых для исполнения всех областей компетенции, а затем на роли проекта, независимо от числа участников лица, которым будет назначена определенная роль [2 с. 80].

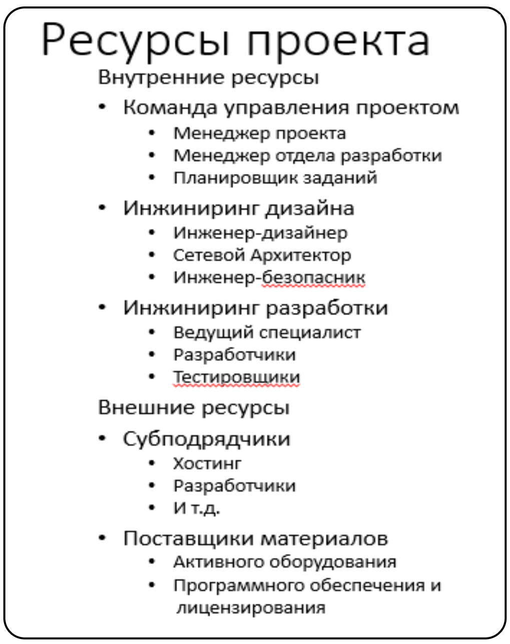


Рисунок 4 – Пример структуры разбивки OBS организации

OBS подготовлен с идеей, что каждое задание в WBS должно быть назначено на роль или набор ролей. Другими словами, роли распределяются на подробные задания с указанным количеством ресурсов и соответствующей предполагаемой рабочей нагрузкой, необходимой для выполнения задания.

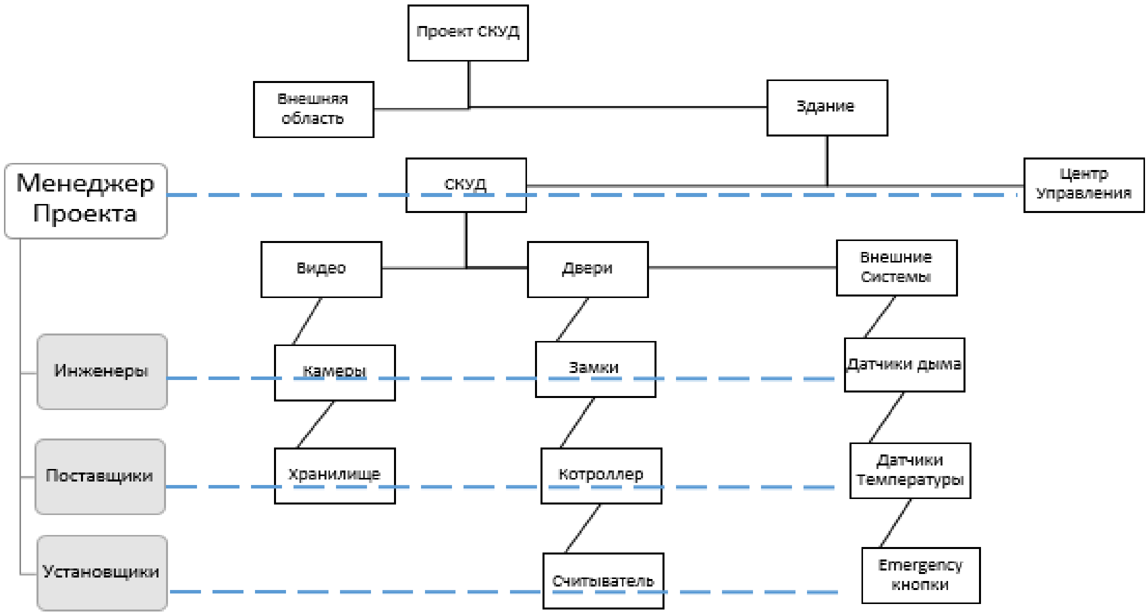


Рисунок 5 – Пример WBS и OBS проекта

Рисунок 5 представляет собой упрощенное изображение того, как соотносятся WBS и OBS. На этапе мониторинга и контроля проекта обязательно, чтобы за каждую деятельность отвечал ответственный человек. Таким образом, подводя итоги процесса планирования, можно заключить, что мы создали WBS и теперь включили ответственного исполнителя или группу исполнителей из предоставленного объема людских ресурсов. По сути, для заданий, определенных в WBS, мы распределили ресурсы через OBS.

Разбивка структуры затрат CBS – “Сколько”

Теперь, когда мы обсудили «что» будет достигнуто через WBS и «кто» будет выполнять действия через OBS, клиенты и исполнители хотят знать, сколько это будет стоить. Определение стоимости осуществляется через структуру разбивки затрат (CBS). CBS – это система для разделения проекта на аппаратные элементы и подэлементы, функции и подфункции и категории затрат. Это иерархическая структура, которая классифицирует ресурсы по счетам затрат, как правило, человеческие ресурсы, материалы и другие прямые затраты. Кроме того, он представляет экономическую разбивку проекта на бюджеты по пакетам работ. Это позволит руководителю проекта отслеживать ход выполнения проекта и его расходы в соответствии с запланированной разбивкой заданий и обязанностей. CBS включает в себя всю прямую полную стоимость труда исполнителей, материалов, а также так называемые накладные расходы по проекту, которые по-прежнему являются прямыми затратами, необходимыми для выполнения проекта.

Накладные расходы включают стоимость оборудования (как правило, в условиях средней амортизации активов), управление проектом, услуги по проектированию, получение необходимых лицензий и расходы по управлению рисками и т.д. В CBS не нужно включать накладные расходы компании, не связанные с проектом, такие как общие зарплаты, коммунальные услуги, страхование, налоги, проценты и другие расходы, которые не находятся под непосредственным контролем команды проекта, а скорее связаны с действиями высшего руководства компании [3 с.273].

Существует два основных подхода к структурированию прямой разбивки затрат. Каждый подход используется в определенных обстоятельствах в зависимости от различных целей учета затрат.

Первый подход использует WBS в качестве структуры управления затратами проекта, так что CBS и WBS имеют одинаковую структуру, и каждый счет затрат согласуется с пакетом работ или подробным заданием. Другими словами, структура финансового учета – это та же WBS, которая была заполнена информацией о затратах: конечный результат – это иерархическая структура затрат, которая будет использоваться командой проекта для составления бюджета, учета и контроля. С данным подходом построения CBS связан метод Activity Based Costing (ABC) [4 с.94], который определяет оценку бюджета как и учет фактических расходов. Преимущество состоит в том, что бюджетирование и отслеживание проекта разрабатываются на WBS точно так, как будет выполнен проект, с подробным анализом на конечном уровне разложения WBS: стоимость элементарного задания может включать в себя суммирование стоимости оплаты труда исполнителей силы, количество материала, оборудования и стоимости субподряда или услуги.

Система кодирования может быть фирменной или стандартизированной, например, такой как предлагает система финансового учета компании.

Второй подход к составлению бюджета CBS заключается в использовании метода Agile [1 с.3] в корпоративных проектах в качестве системы расчета затрат по проекту. С помощью этого метода каждое задание WBS должно быть связано со счетом затрат с помощью оценочных методов Scrum Poker [2 с.183] или Wideband Delphi [8, с 10]. Стандартный подход метода Agile заключается в следующем:

- Разбивка (определение) проекта на истории пользования;
- Декомпозиция историй пользования на задания (и опционально на подзадания);
- Использование методов Scrum Poker или Wideband Delphi для определения трудоемкости и выполнения заданий в терминах человеко-часов и соответственно времени и денег;
- Определение общих затрат на выполнение всех заданий и подзаданий проекта;
- Добавление 30% запаса;
- Добавление стоимости необходимых материалов, оборудования и средств.

Иллюстрация того, как часто могут быть представлены истории пользования, приведена ниже в таблице 1 [1 с.139].

Таблица 1 – Пример истории пользования

Предыстория: менеджер отдела кадров хочет создать систему автоматизированных тестов для проведения интервью кандидатов на открытые позиции компании
Как менеджер, я хочу просмотреть свои существующие тесты, чтобы я мог вспомнить, что у меня есть в наличии, и выяснить, могу ли я просто повторно использовать или обновить существующий тест для позиции, в которой я сейчас нуждаюсь.
Как менеджер по персоналу, я хочу сопоставить требуемые навыки открытой позиции с темами для тестов, чтобы я мог создать тест, подходящий для отбора кандидатов.
Как менеджер по персоналу, я хочу отправить черновой тест функциональному менеджеру, чтобы убедиться, что я рассмотрел правильные темы в контрольной проверке.
Как функциональный менеджер, я хочу отправить отзыв о контрольном тесте менеджеру по персоналу, чтобы убедиться, что проверка кандидатов проходит наилучшим образом.
Как менеджер по персоналу, мне нужно приобрести обновленный уровень обслуживания системы, чтобы я мог добавить дополнительные темы к моим тестам.
Как менеджер по персоналу, я хочу добавить дополнительные вопросы в тест, чтобы мы охватили дополнительные темы, которые важны для функционального менеджера.
Как менеджер по персоналу, я хочу попробовать скрининг-тест, чтобы убедиться, что он работает так, как я ожидал, и что я готов передать ее кандидатам и поделиться результатами с функциональным менеджером.

Несмотря на видимую разницу в подходе определения CBS, в случае использования подхода Agile конечная CBS так же, как и в первом случае, в конечном счете определяется произведением стоимости отдельного модуля на количество выполненных модулей. В результате, чаще всего собственная CBS исполнителя, используемая для учета затрат, представляется как основа для контракта. При таких обстоятельствах основная задача состоит в том, чтобы корректно учесть все необходимые затраты в случае перекрывающихся функциональных модулей.

В проектах программной разработки WBS контракта готовится самим исполнителем и, следовательно, он равен WBS проекта. Сумма пакетов работ по контракту является затратной стоимостью плюс цена контракта оплачивается на основе хода выполнения проекта. Поскольку выручка является функцией стоимости, то проект WBS должен отражать CBS, если требуется корпоративный контроль затрат. Если это требуется, то рекомендуется использовать CBS более высокого уровня, а затем разбивать их в соответствии с потребностями работы.

Заключение

Таким образом, задачи планирования включают в себя определение объема работ, их исполнителей и составление бюджета, как основное необходимое условие для планирования предполагаемого времени выполнения проекта. Основой задачей является определение необходимого уровня декомпозиции WBS и распределение исполнителей из OBS для определения компонент бюджета проекта CBS.

ЛИТЕРАТУРА

1. Успех в Agile: разработка программного обеспечения с использованием Scrum. Автор: Майк Кон, издатель: Addison-Wesley Professional, 5 ноября 2009 г.
2. Оценка проектных решений: тематические исследования в ЮВ Кэрол Л. Гувер, Мел Россо-Льопарт, Джил Таран. Опубликовано 27 октября 2009 г. издательством Addison-Wesley Professional.
3. Основы разработки программного обеспечения Фрэнк Цуй, Орландо Карам Джонс и Бартлетт Лирнинг, 22 апреля 2010 г.
4. Управление проектами для строительства объектов. Руководство для инженеров и архитекторов. Авторы: De Marco, Alberto 2011, VIII, 189p. Переплет ISBN 978-3-642-17092-8.
5. Руководство к Своду знаний по управлению проектами, опубликованное: Project Management Institute, Inc. 14 Кампус Бульвар Ньютаун Сквер, Пенсильвания 19073-3299 США.
6. Организационное поведение / Стивен П. Роббинс, Тимоти А. Судья. - 15-е изд. п. см. Включает индексы. ISBN-13: 978-0-13-283487-2.
7. Управление проектами: системный подход к планированию, планированию и контролю / Автор: Гарольд Керцнер, 848 с. 12-е изд. Опубликовано: John Wiley & Sons Incorporated, 2001 ISBN: 978-1-119-16536-1.
8. Экономика разработки программного обеспечения (серия Prentice-Hall Advances in Computing Science & Technology). Автор: Барри В. Бем, 42с. ISBN0138221227 (ISBN13: 9780138221225).

REFERENCES

1. Succeeding with Agile: Software Development Using Scrum By Mike Cohn Publisher: Addison-Wesley Professional, November 5, 2009
2. Evaluating Project Decisions: Case Studies in SE By Carol L. Hoover, Mel Rosso-Llopart, Gil Taran Published Oct 27, 2009 by Addison-Wesley Professional.
3. Essentials of Software Engineering By Frank Tsui , Orlando Karam Jones & Bartlett Learning, Apr 22, 2010

4. Project Management for Facility Constructions A Guide for Engineers and Architects Authors: De Marco, Alberto 2011, VIII, 189p., Hardcover ISBN 978-3-642-17092-8
5. A Guide to the Project Management Body of Knowledge, Published by: Project Management Institute, Inc. 14 Campus Boulevard Newtown Square, Pennsylvania 19073-3299 USA
6. Organizational behavior / Stephen P. Robbins, Timothy A. Judge. — 15th ed. p. cm. Includes indexes. ISBN-13: 978-0-13-283487-2
7. Project Management: A Systems Approach to Planning, Scheduling, and Controlling Author: Harold Kerzner, 848p. 12th ed. Published by: John Wiley & Sons Incorporated, 2001 ISBN: 978-1-119-16536-1
8. Software Engineering Economics (Prentice-Hall Advances in Computing Science & Technology Series) Author: Barry W.Boehm, 42p. ISBN0138221227 (ISBN13: 9780138221225)

Алин Г.Т.

Бағдарламалық қамтамасыз ету жобасын басқару: WBS жобасының даму процессі

Аңдатпа: Бұл мақалада бағдарламалық жасақтама жасау саласындағы жобалық жұмыс құрылымын қалыптастыру және дамыту процесін басқарудың жалпы сипаттамалары мен негізгі технологиялары қарастырылады. Жобалық жұмыс құрылымын құру процесін басқарудың заманауи тәсілдері айқындалды, оңтайлы бюджеттеу және басқару контекстінде ДББ-ға қойылатын талаптардың ыдырауы мен дамуы кезінде пайда болатын мүмкіншіліктер айқындалды. Мақалада бағдарламалық жасақтаманы әзірлеу жобаларын іске асыруда үлкен жетістікке жету үшін жобаны оңтайландыру және талдау қажеттілігі талқыланады.

Түйінді сөздер: IT-жобалар, жоспарлауды оңтайландыру, жобаларды басқару технологиялары, жоба жұмысының құрылымын ыдырату

Alin G.T.

Software development project management: the process of WBS composing.

Abstract: this article discusses the general characteristics and basic technologies for managing the process of formation and development of the project work structure in the area of software development. The modern approaches to managing the process of developing the project work structure are identified, possible options that arise during the decomposition and development of requirements for WBS in the context of optimal budgeting and management are considered. The article discusses the need for optimization and analysis of the project to ensure ultimate success in the implementation of software development projects.

Key words: IT projects, planning optimization, project management technologies, decomposition of the project work structure.

Сведения об авторах:

Алин Галымзада Темиртасович – кандидат технических наук, ассистент-профессор кафедры компьютерной инженерии и информационной безопасности Международного университета информационных технологий.

About authors:

Alin Galymzada Temirtasovich - candidate of technical sciences, assistant professor at the Department of Computer Engineering and Information Security of the International University of Information Technologies.

УДК 530.1, 681.3.06

Ипалакова М.Т., Цой Д.Д., Дайнеко Е.А.*

Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан

МЕДИЦИНСКИЙ ТРЕНАЖЕР СМЕШАННОЙ РЕАЛЬНОСТИ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ КОРОНАРНОЙ АНГИОПЛАСТИКИ

Аннотация. *Разработка тренажеров в форме программного обеспечения для использования в медицинском образовании является новым трендом. Это обусловлено тем, что виртуальный тренажер дешевле, безопаснее и по сравнению со специализированными устройствами более гибкий и функциональный.*

В данной статье представлен виртуальный тренажер, позволяющий проводить процедуру коронарной ангиопластики, с использованием технологии смешанной реальности в форме взаимодействия пользователя и приложения через контроллер Leap Motion. Проект разработан на базе игрового движка Unity, код написан на языке C#.

Ключевые слова*: виртуальная реальность, смешанная реальность, дополненная реальность, 3D-моделирование, Unity3D, C # (CSharp), медицина.*

Введение

Заболевания кровеносной системы являются самыми распространенными в мире. В Казахстане число людей, страдающих от повышенного артериального давления, колеблется в районе 20-30% от числа взрослого населения. По этой причине одним из главных направлений деятельности Всемирной Организации Здравоохранения являются превентивные меры для снижения данных показателей [1]. Для проведения качественных улучшений в системе здравоохранения в последнее время все чаще используются новые подходы и инструменты.

Одним из эффективных методов, способных реализовать данные улучшения, являются средства ИКТ.

Мировой опыт демонстрирует успешные случаи внедрения виртуальных тренажеров в качестве инструмента для практики специалистов. В силу того, что с развитием техники меняются инструменты, а также методики процедур, врачам необходимо всегда быть подготовленными к ситуации.

Как уже было сказано выше, данные технологии сегодня широко используются в медицине. Во-первых, использование виртуальной среды безопаснее реальных операций по причине отсутствия рисков как для жизни пациентов, так и для специалистов. При этом уровень погружения – иммерсивности за счет высококачественной визуализации помогает снизить стресс в послеоперационный период.

Обзор современных случаев внедрения виртуальных тренажеров, проведённый в [2], демонстрирует высокий потенциал подхода и возможность изучения тела человека в самых подробных деталях.

Проект, описанный в [3] – это тренажер, который помогает получить информацию о различных частях черепа. Программа обучает пользователей, визуализируя разные физиологические процессы, затем им предлагается закрепить знания, пройдя тестирование.

Тренажер для стоматологов и вовсе заменяет дорогой специализированный аппарат за счет возможности выполнять определенный набор операций в виртуальной среде [4].

Вопрос снижения затрат без потерь эффективности также решается путем внедрения подобных тренажеров. Например, в [5] представлена обучающая система для работников неотложной помощи. За счет доступности приложения медицинские учреждения могут сократить затраты на повышение квалификации персонала.

Технология смешанной реальности обладает многими свойствами. Основными являются безопасность, иммерсивность. Они гарантируют безопасность, а также необходимый уровень погружения пользователя в процедуру. Также известны случаи использования виртуальной технологии в качестве вспомогательного инструмента анестезии для проведения верхней эндоскопии желудочно-кишечного тракта [6].

Впервые такое использование технологии было предложено Хоффманом в 1998 [7]. В результате были получены высокие показатели в уменьшении боли в случаях ожогов.

Еще одним свойством технологии является возможность визуализировать сложные состояния и недоступные части тела. Такой результат получен в работе [8], где был проведен анализ проектов, использующих виртуальную реальность в медицине.

Также популярно использование виртуальных инструментов как пособия для тренировки навыков. В [9] описывается проект, помогающий медицинским работникам оттачивать навыки через визуализацию и тестирование внутри приложения.

Авторы статьи [10] оценивают различные виртуальные тренажеры, используемые в хирургии, управлении болью, терапии ментальных заболеваний.

Все эти работы демонстрируют необходимость создания приложений для тренировки медицинских работников и их полезность в качестве инструмента профилактики для населения.

Методы

В качестве метода разработки выбрана Agile. Такой подход позволяет планировать, создавать дизайн, разрабатывать, тестировать, делать релизы и проводить тесты при каждой итерации. Таким образом работа выполняется по всем направлениям в уменьшенном масштабе. Agile создает гибкие условия для работы над проектом и изменять его в любой момент. Благодаря частому обновлению всегда видно какая сфера требует наибольшего внимания.

Основная идея проекта

Идея проекта заключается в создании виртуального тренажера, позволяющего проводить симуляции ангиопластики в режиме смешанной реальности. На рисунке 1 представлен прототип сцены. Общий концепт практической сцены состоит в том, чтобы у пользователя была возможность выполнить хирургическую симуляцию в виртуальной среде.

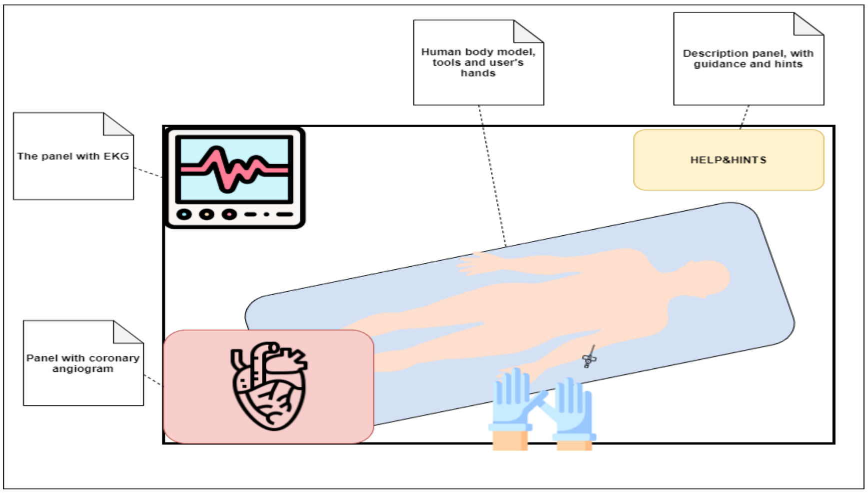


Рисунок 1 – Эскиз главного окна виртуальной физической лаборатории

Данное приложение будет полезно для студентов медицинских колледжей и университетов в рамках переподготовки и повышения квалификации медицинских работников, а также для обычных пользователей, нуждающихся в освещении вопроса сердечно-сосудистых заболеваний.

Диаграмма на рисунке 2 демонстрирует зависимость компонентов внутри системы. В приложении имеется главный интерфейс, который запускает все приложение. Программа состоит из сцены, содержащей модели, которые работают с помощью программного кода. Чтобы модели выглядели реалистично имеется папка с анимациями, текстурами, шейдерами и звуковыми эффектами. Так как приложение поддерживает контроллер Leap Motion, то в компонентах присутствует пакет, организующий его корректную работу и взаимодействие с другими объектами.

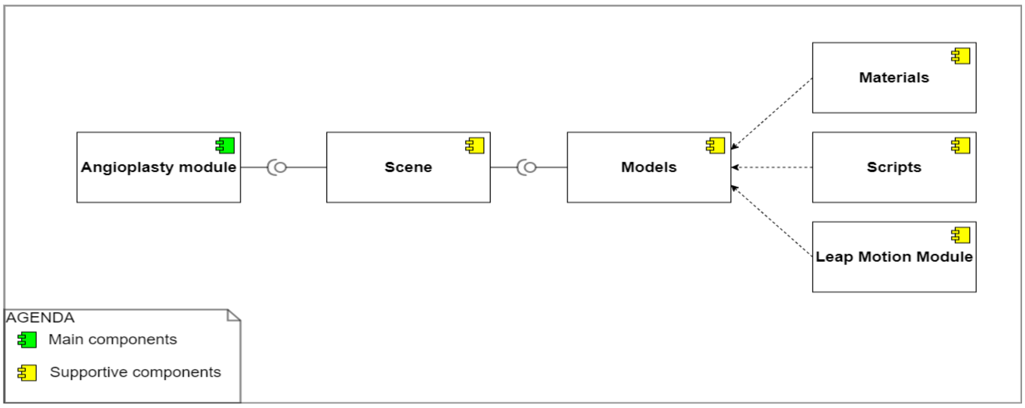


Рисунок 2 – Диаграмма компонентов тренажера

Результаты

На рисунке 3 представлен скриншот, на котором демонстрируется сцена в процессе выполнения процедуры ангиопластики. Сцена сопровождается подсказками для пользователя, которые помогают ему выполнять процедуру. Процедура выполняется с использованием рентген-аппарата для того, чтобы наблюдать процессы, происходящие в сосудах. По этой причине на экране имеются два основных инструмента пользователя: экран кардиомонитора и экран ангиографа. В качестве манипулятора пользователь использует свои руки, благодаря поддержке модуля контроллера Leap Motion. Помимо рук пользователю необходимо использовать палочку либо ручку, которая будет играть роль инструмента. По ходу выполнения операции палочка будет отображаться в сцене в виде баллона со стентом, шприца с чернилами для окрашивания сосудов. То есть помогать пользователю проводить процедуру. На рисунке 3 демонстрируется сцена с данной операцией.

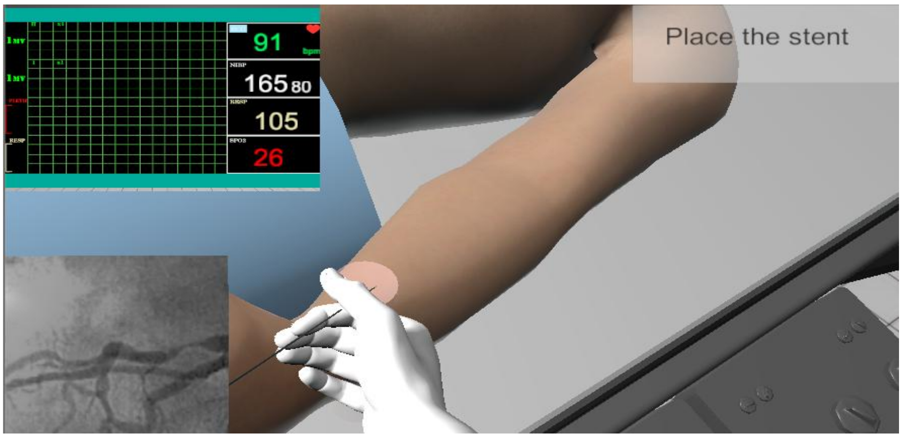


Рисунок 3 – Главное окно с выполнением ангиопластики

Таким образом было создано приложение, имитирующее взаимодействие хирурга с пациентом во время проведения коронарной ангиопластики.

Заключение

Выполнение работы позволило создать программный комплекс по выполнению коронарной ангиопластики. Также определены пути улучшения созданного приложения. Создан план дальнейших действий для того, чтобы внедрить проект в медицинские образовательные учреждения, а также для пользования населением.

ЛИТЕРАТУРА

1. ВОЗ. Сердечно-сосудистые заболевания. Стратегические приоритеты Программы ВОЗ по сердечно-сосудистым заболеваниям https://www.who.int/cardiovascular_diseases/ priorities/ru/
2. Monsky, W. L., James R., Seslar S. S. Virtual and Augmented Reality Applications in Medicine and Surgery-The Fantastic Voyage is here //Anat Physiol. – 2019. – Т. 9. – №. 1
3. Ziegler, R., et al. A virtual reality medical training system //International Conference on Computer Vision, Virtual Reality, and Robotics in Medicine. – Springer, Berlin, Heidelberg, 1995. – С. 282-286.
4. Pavaloiu, I. B., et al. Inexpensive dentistry training using virtual reality tools //INTED2016, The 10th annual International Technology, Education and Development Conference. – 2016. – С. 279-285.
5. Ferracani, A., et al. Natural and virtual environments for the training of emergency medicine personnel //Universal Access in the Information Society. – 2015. – Т. 14. – №. 3. – С. 351-362.
6. Vasquez J. L. M. et al. Virtual Reality Assisted Anesthesia (VRAA) during Upper Gastrointestinal Endoscopy: Report of 115 Cases—Analysis of Physiological Responses //Surgical Research Updates. – 2017.
7. Monsky W. L., James R., Seslar S. S. Virtual and Augmented Reality Applications in Medicine and Surgery-The Fantastic Voyage is here //Anat Physiol. – 2019. – Т. 9. – №. 1
8. Ziegler R. et al. A virtual reality medical training system //International Conference on Computer Vision, Virtual Reality, and Robotics in Medicine. – Springer, Berlin, Heidelberg, 1995. – С. 282-286.
9. Li L. et al. Application of virtual reality technology in clinical medicine //American journal of translational research. – 2017. – Т. 9. – №. 9. – С. 3867.
10. – Hoffman H. G. et al. Physically touching and tasting virtual objects enhances the realism of virtual experiences //Virtual Reality. – 1998. – Т. 3. – №. 4. – С. 226-234.

Ипалакова М.Т., Цой Д.Д., Дайнеко Е.А.

Коронарлық ангиопластика үшін аралас шындық медициналық тренажер

Аңдатпа: Медициналық білім беруде қолдануға арналған бағдарламалық жасақтама түріндегі тренажерлердің дамуы жаңа бағыт болып табылады. Бұл виртуалды тренажердің мамандандырылған құрылғылармен салыстырғанда арзан, қауіпсіз, икемді және функционалды екендігіне байланысты.

Бұл мақалада Leap Motion контроллері арқылы пайдаланушы-қосымшаның өзара әрекеттесуі түрінде аралас шындық технологиясын қолдана отырып, коронарлық ангио-пластика жасауға мүмкіндік беретін виртуалды тренажер ұсынылған. Жоба Unity ойын қозғалтқышының негізінде жасалды, код C # түрінде жазылған.

Түйінді сөздер: виртуалды шындық, аралас шындық, кеңейтілген шындық, 3D модельдеу, Unity3D, C # (CSharp), медицина

M.T. Ipalakova, D.T. Tsoy, Y.A. Daineko

Mixed reality medical simulator for coronary angioplasty

Abstract. The development of simulators in the form of software for use in medical education is a new trend. This is due to the fact that the virtual simulator is cheaper, safer and more flexible and functional compared to specialized devices.

This article presents a virtual simulator that allows you to perform coronary angioplasty using mixed reality technology in the form of user-application interaction through the Leap Motion controller. The project was developed based on the Unity game engine, the code is written in C #.

Key words: virtual reality, mixed reality, augmented reality, 3D modeling, Unity3D, C # (CSharp), medicine

Сведения об авторах:

Дайнеко Евгения Александровна, PhD, ассистент-профессор кафедры компьютерной инженерии и телекоммуникаций Международного университета информационных технологий.

Ипалакова Мадина Тулегеновна, к.т.н., ассистент-профессор кафедры компьютерной инженерии и телекоммуникаций Международного университета информационных технологий.

Цой Дана Дмитриевна, магистр, специалист лаборатории смешанной реальности МУИТ.

About authors:

Yevgeniya A. Daineko, PhD, assistant-professor, Computer Engineering and Telecommunication Department, International Information Technology University.

Madina T. Ipalakova, cand. of tech. sci., assistant-professor, Computer Engineering and Telecommunication Department, International Information Technology University.

Tsoy D. Dana, M.Eng.&Tech., specialist of the Mixed Reality laboratory, International Information Technology University.

УДК 004.89+371.26

Бекаулова Ж.М.[1], Мауленов Е.С.[1], Дузбаев Н.Т.[1], Дайнеко Е.А.[1], Маматова Г.У.

[1] Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан
[2] Казахский Национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА НА ОСНОВЕ SMART-ТЕХНОЛОГИЙ

Аннотация. *Статья посвящена теоретическому рассмотрению феномена смарт технологий в современном образовании с позиций развития универсальных и профессиональных компетенций. Процесс обучения учеников предполагает обращение к инновациям, поскольку применение новых технологий существенно расширяет границы и преподавания, и получения знаний, и применения имеющихся умений и навыков в практической деятельности. Включенность в образовательное пространство современного вуза такой инновации, как смарт-технологии, обусловливает ценный переход к разностороннему обучению. Погружение студентов в сферу новых образовательных технологий актуализирует ранее скрытые творческие и интеллектуальные ресурсы, мотивирует на исследовательскую деятельность, повышает уровень познавательного интереса. Концептуальная модель с адаптивной образовательной онлайн-системой, основанной на SMART-технологиях может быть использована двумя возможными путями. Первый, как дополнительный инструмент для модификации традиционного процесса обучения путем оптимизации повторяющихся элементов, которые могут быть автоматизированы. Второй, модернизировать текущий процесс обучения путем внедрения новых методик преподавания, такие как e-learning, m-learning, blended learning и других. В результате работы системы подход, ориентированный на преподавателя (teacher-centric), заменяется подходом, ориентированным на студента (student-centric). Тем не менее особо отмечается, что* *роль преподавателя не нивелируется, а наоборот, преподаватель выступает в качестве ментора и наставника, который с использованием SMART-технологий сможет максимально раскрыть свой потенциал. Это в свою очередь положительно скажется на качестве знаний, полученных обучаемыми в этой образовательной системе.*

Ключевые слова: *e-learning, онлайн-оценивание, адаптивное обучение, адаптивное оценивание, адаптивное тестирование, дерево знаний, smart-технологии, m-learning, теория графов.*

Введение. В последние годы становится популярным получать образование онлайн. Помимо этого в связи с появлением и распространением коронавируса по всему миру в конце 2019 и начале 2020 года большая часть компаний остановило деятельность или перешло на онлайн-функционирование. Это же касается учебных заведений от школ до университетов. Внезапный рост внимания и примеров практического применения или перехода на онлайн-формат привел к более продуктивному росту числа исследований в сфере e-learning. Martin Ebner и другие провели анализ процесса перехода учебного процесса с традиционного офлайн на онлайн формат на примере австрийского университета Graz University of Technology (TU Graz) [1]. В Китае правительством была инициирована кампания «School's Out, But Class On», которая подразумевает создание крупномасштабного онлайн образовательного приложения для обучающихся со всей страны [2]. Из-за введенного карантина более 270 миллионов китайских обучающихся вынуждены были перейти в онлайн. Для того, чтобы системы поддерживали нагрузку от такого количества пользователей были использованы облачные технологии, которые позволяют разрабатывать решения, рассчитанные на очень большие нагрузки. Это не единичный пример использования облачных технологий в e-learning. В статье Abderrahim El Mhouti и других проводится обзор существующих решений e-learning на основе облачных технологий [3].

Стоит отдельно отметить роль государства в развитии e-learning в стране. Так, например, в Китае в рамках кампании «School's Out, But Class On» правительство внесло корректировки на законодательном уровне для реализации масштабного проекта по предоставлению e-learning формата обучения для всей страны. Среди наиболее интересных изменений в законах то, что теперь процесс обучения не является ориентированным на преподавателя (teacher-centric), а переходит на ориентир на студента (student-centric) и преподаватель выступает в роли наставника и ментора. Подобный подход использовали новаторы из Индии, которые разработали SMART mobile Android-приложение [4]. Основная идея этого приложения состоит в том, что для реализации m-learning процесса обучения нужно от teacher-centric подхода перейти к student-centric. Эти изменения предоставят возможность персонализировать процесс обучения, построить индивидуальную траекторию обучения и проводить адаптивное тестирование др. положительные стороны внедрения SMART-технологий в учебный процесс.

Наиболее продвинутыми видами e-learning систем являются – adaptive e-learning. Основная идея заключается в персонализации траектории обучения под каждого обучающегося. Для того, чтобы система была адаптивной могут быть применены различные подходы. Hsiao-Chien Tseng и др. в своей работе использовали теорию концептуальных карт (concept maps), разработанный Novak and Musonda в 1991 году [5]. Разработка позволяет из определенного набора учебного материала или курсов по имеющимся данным об обучающемся индивидуально подобрать следующий материал/курс.

Dalal Abdullah и др. в своей работе предлагают модель адаптивной образовательной системы, в котором адаптивным является процесс оценивания, т.е. adaptive e-assessment [6]. Система может быть интегрирована с другими решениями, так как разрабатывается как отдельный модуль. В случае с авторами решение было интегрировано с LMS Moodle. Авторы утверждают, что невозможно создать адаптивную образовательную систему, если в ней не адаптирован процесс оценивания, т.е. обратная связь от студента преподавателю. Авторы данной работы полностью согласны с этим утверждением и одной из основных компонентов нашей системы является adaptive e-assessment.

Dalal Abdullah и др. в своей образовательной системе как методологическую базу выбрали Computerized Adaptive Test (CAT). Computerized Adaptive Test (CAT) – это одно из самых распространенных теорий, которая используется для реализации адаптивных оценочных систем [7]. Мы изучили подход CAT, его преимущества и недостатки для реализации адаптивных систем. Свой выбор сделали в пользу Knowledge Space Theory (KST), которая также является одним из частых выборов авторов, разрабатывающих адаптивные системы [8]. В основной части будет сравнение двух подходов, а также информация о будущей образовательной системе. Далее будет представлена концептуальная модель образовательной системы, которая базируется на теории KST.

Концептуальная модель адаптивной образовательной онлайн системы. Основная цель системы: точное определение уровня знаний по определенному предмету индивидуально для каждого обучающегося путем минимального количества тестовых вопросов.

Рассмотрим основные компоненты этой системы. Центральным компонентом является «дерево знаний» на подобии Knowledge Structure tree [9]. Абстрактно можно его представить в виде ориентированного графа/дерева без циклов. Вершинами этого графа будут «единицы знаний» по аналогии с Knowledge Unit, которая является одним атомарным понятием в рамках предмета/курса, которое может быть проверено одним вопросом. Ребрами в этом графе являются взаимосвязи между «единицами знаний». На рис. 3 можно увидеть, что обучающийся, который освоил понятия A и B готов к изучению материала C. Обратное тоже верно. Если система получила подтверждение, что обучающийся освоил/знает материал C, то можем условно принять, что материалы A и B также освоены.

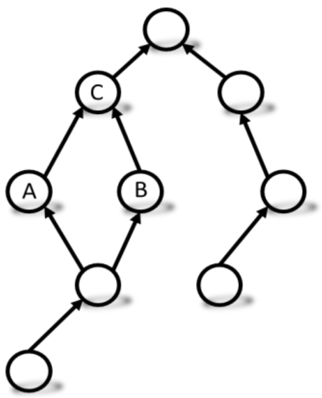


Рисунок 3 – Пример «дерева знаний»

Следующим по важности компонентом является база вопросов. Каждый вопрос может быть связан с несколькими вершинами «дерева знаний». Это говорит о том, что этот вопрос может быть использован для проверки знаний обучающегося по связанным с ним темам/понятиям. Также верно и обратное, одна вершина («единица знаний») может быть связана с несколькими вопросами. Чем больше вопросов будет у одной вершины, тем меньше шанс, что обучающиеся выучат правильные ответы или смогут списать друг у друга, так как вопросы одинаковые.

Следующие 2 компоненты: обучающийся и преподаватель. Обучающийся является источником данных, т.е. истории ответов на вопросы. Эти данные будут использоваться для расчета различных параметров вопроса:

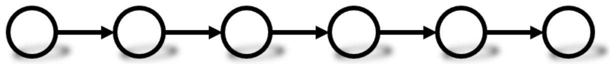
1) валидация/корректность вопроса;
2) сложность;
3) необходимое количество времени для ответа;

Используя вышеуказанные параметры система сможет:

1) выявлять и исключать некорректные вопросы;
2) определять факт угадывания студентом;
3) проверять освоение «единицы знаний» обучающимися.

Также стоит отметить, что обучающиеся смогут показывать уровень владения темой через пополнение базы вопросов, т.е. создания своих вопросов. Созданные студентами вопросы уже будут привязаны к «единице знаний». Системе далее достаточно получить подтверждение от преподавателя, что вопрос, варианты ответа и правильный ответ, указанные студентом, являются корректными и относятся к привязанной теме. При положительном исходе система помечает, что студент освоил тему, так как только студент, который полностью освоил этот материал, сможет придумать вопрос по этой теме. Далее вопрос проходит валидацию через добавление к тестам обучающихся по соответствующей теме. Важно отметить, что ответы, данные студентами на невалидированные вопросы, не учитываются, а задаются лишь для сбора необходимых данных для дальнейшего подсчета параметров конкретного вопроса. После сбора необходимого количества данных система автоматически валидирует вопрос. Если вопрос успешно проходит валидацию, то он добавляется в основную базу тестов и используется для тестирования и оценивания уровня знаний обучающихся.

С компонентом «обучающийся» тесно связан компонент «преподаватель». Преподаватель является источником информации для построения «дерева знаний». Это происходит достаточно просто для пользователя системы. Задается вопрос: «Является ли тема X следующей для изучения после темы Y». Ответы на подобные вопросы не требуют от преподавателя много времени и не предоставляют сложность. Система автоматически, собирая ответы на эти вопросы, перестраивает «дерево знаний», постепенно улучшая его. Следует особо отметить, что для начала работы системы достаточно наличия даже самой прямолинейной связи между темами, например, как в книгах – последовательно (рис. 4).



Риунок 4 – Пример самого простого, последовательного вида «дерева знаний»

Другой функцией преподавателя в системе, также как и у обучающихся, является возможность создания собственных вопросов. Но, в отличие от обучающихся, у преподавателя есть возможность выбрать «единицу знаний», для которой планируется создать вопрос.

Таким образом можно графически проиллюстрировать все основные компоненты системы следующим образом (рис. 5):

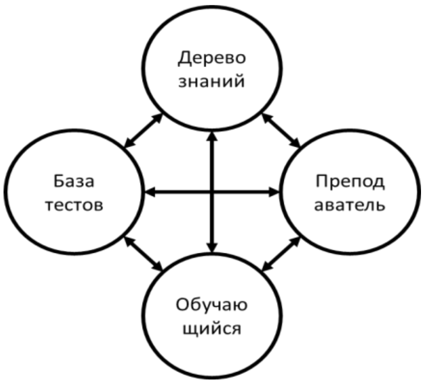


Рисунок 5 – Концептуальная модель адаптивной образовательной онлайн-системы

По перечисленным выше характеристикам очевидно то, что система может полноценно работать изначально. Но также и очевидно то, что система будет дальше развиваться и улучшаться только при активной работе обучающихся и преподавателей. Возникает вопрос:

почему студенты и преподаватели будут использовать и активно развивать систему. Ответ на этот вопрос находится в преимуществах системы для конечных пользователей.

Основными преимуществами для обучающегося являются:

- в режиме онлайн можно понять освоение/знание необходимой темы до следующего занятия. Это очень важно, так как у обучающегося будет возможность доучить/перечитать материал и прийти готовым на следующее занятие. В этом случае обучающийся с большей долей вероятности освоит и следующий материал. Но самым главным является то, что обучающийся не окажется в ситуации, когда видит оценку/уровень усвоения предыдущего материала за несколько минут перед следующим занятием. Так происходит в традиционной системе образования, когда преподаватель раздает тетради с оценками за домашнее задание перед началом изучения следующего материала. У обучающихся при таком подходе просто нет возможности доучить/перечитать предыдущий материал для того, чтобы быть готовым к освоению следующей темы;
- возможность выбора: можно решить задачу или создать свою. Это будет развивать креативность среди обучающихся, а также мотивировать их, так как создание нового вопроса вызывает больший вызов нежели решение задачи.

Самым основным преимуществом использования системы для преподавателя является то, что не нужно вручную проверять домашние задания из тетрадей обучающихся. Система автоматически проверит всех обучающихся и отправит детальный отчет по освоению материала. Также система сможет отправить дополнительную информацию персонально по каждому обучающемуся по списку тем, которые с большей долей вероятности не были освоены или забыты. Это позволит преподавателю время, освободившееся за счет автоматической проверки домашних заданий обучающихся, посвятить улучшению учебного материала и работе с отстающими обучающимися.

Мы рассмотрели основные компоненты и концептуальную модель адаптивной образовательной онлайн-системы. Мы наблюдаем, что не все моменты были охвачены или учтены. Также предстоит дальнейшее исследование темы, которое будет описано подробнее далее.

Заключение и обсуждение. В текущей ознакомительной статье опустили некоторые кейсы, перечислены наиболее значимые из них:

- так как основным инструментом обратной связи является тестирование с вариантами ответов, то есть вероятность угадывания правильного ответа студентом. Мы предложим авторский алгоритм по выявлению угаданных ответов студентов;
- есть общее заблуждение, что тестирование проверяет только фактографические знания. В теории тестирования можно выделить порядка 10 видов тестов, помимо фактографических;
   - алгоритмы и формулы используемые системой;
   - архитектура информационной системы.

После получения модели адаптивной образовательной онлайн-системы и завершения разработки прототипа, авторы планируют провести эксперимент на начальных-средних классах школы по предмету математика. Эксперимент будет заключаться в сравнении прироста в полученных знаниях 2 групп учащихся: с и без использования онлайн-системы как дополнительного инструмента в процессе обучения.

Работа выполнена за счет средств Министерства образования и науки Республики Казахстан на 2018-2020 годы (№ AP05135692).

ЛИТЕРАТУРА

1. Martin Ebner, Sandra Schön, Clarissa Braun, Markus Ebner, Ypatios Grigoriadis, Maria Haas, Philipp Leitner and Behnam Taraghi. *COVID-19 Epidemic as E-Learning Boost? Chronological Development and Effects at an Austrian University against the Background of the Concept of "E-Learning Readiness"* // Future Internet. – 2020. – 12. – 94. – 1-20.

2. Longjun Zhou, Fangmei Li, Shanshan Wu, Ming Zhou. *“School’s Out, But Class’s On”, The Largest Online Education in the World Today: Taking China’s Practical Exploration During The COVID-19 Epidemic Prevention and Control as An Example* // Best Evid Chin Edu. – 2020. – 4(2). – 501-519.
3. Abderrahim El Mhouti, Mohamed Erradi, Azeddine Nasseh. *Using cloud computing services in e-learning process: Benefits and challenges* // Educ Inf Technol. – 2018. – 23. – 893-909.
4. Wasim Haidar, Wilfred Blessing, Prashant Johri, Surendra Pal Singh, Sutherlin Subitha. MEE-app: *An Effectual Application for Mobile based Student Centered Learning System* // 4th International Conference on Computing Communication and Automation (ICCCA). – Greater Noida, India, 2018.
5. Hsiao-Chien Tseng, Chieh-Feng Chiang, Jun-Ming Su, Jui-Long Hung and Brett E. Shelton. *Building an Online Adaptive Learning and Recommendation Platform* // SETE 2016: Emerging Technologies for Education. – 2017. – 428-432.
6. Dalal Abdullah Al Johany, Reda Mohamed Salama, Mostafa Saleh. ASSA: *Adaptive E-Learning Smart Students Assessment Model* // International Journal of Advanced Computer Science and Applications. – 2018. – 9(7). – 128-136.
7. Mark Reckase, Unhee Ju, and Sewon Kim. *How Adaptive Is an Adaptive Test*:
8. *Are All Adaptive Tests Adaptive?* // Journal of Computerized Adaptive Testing. – 2019. – 7(1). – 1-14.
9. Ying Fang, Zhihong Ren, Xiangen Hu and Arthur C. Graesser. *A meta-analysis of the effectiveness of ALEKS on learning* // Educational psychology. – 2019. – 39. – 1278-1292.
10. Jean-Claude Falmagne, Jean-Paul Doignon, Mathieu Koppen, Michael Villano, Leila Johannesen. *Introduction to Knowledge Spaces: How to Build,*
11. *Test, and Search Them* // Psychological Review. – 1990. – 97(2). – 201-224.

Zh.M. Bekaulova[1], E.S. Maulenov[1], N.T. Duzbayev[1], Y.A. Daineko[1], G.U. Mamatova[2]

Conceptual model of the educational process based on smart technologies

Abstract. The article is devoted to the theoretical consideration of the phenomenon of smart technologies in modern education from the perspective of the development of universal and professional competencies. The process of teaching students involves turning to innovation, since the use of new technologies significantly expands the boundaries of teaching, and obtaining knowledge, and applying existing skills in practice. The inclusion of such innovations as smart technologies in the educational space of a modern University leads to a valuable transition to versatile learning. Students immersion in the sphere of new educational technologies actualizes previously hidden creative and intellectual resources, motivates research activities, and increases the level of cognitive interest. A conceptual model with an adaptive online educational system based on SMART technologies can be used in two possible ways. The first, as an additional tool for modifying the traditional learning process by optimizing repetitive elements that can be automated. Second, to modernize the current learning process by introducing new teaching methods, such as e-learning, m-learning, blended learning, and others. As a result, system promotes shift of teacher-centric approach to the student-centric. Nevertheless, it is noted that the role of the teacher is not leveled, but rather, the teacher acts as a mentor who will be able to maximize his/her potential using SMART technologies. This, in turn, will positively affect the quality of knowledge received by students in this educational system.

Key words: e-learning, online assessment, adaptive learning, adaptive assessment, adaptive testing, knowledge graph, smart technologies, m-learning, graph theory

Бекаулова Ж.М., Мауленов Е.С., Дузбаев Н.Т., Дайнеко Е.А., Маматова Г.У.

Smart технологияларға негізделген білім беру үрдісінің концептуалдық моделі

Аңдатпа: Мақала заманауи білім берудегі смарт технологиялар феноменін әмбебап және кәсіби құзыреттілікті дамыту тұрғысынан теориялық қарастыруға арналған. Студенттерді оқыту үдерісі жаңа технологияларды қолданып оқыту мен білім алудың және практикалық қызметте бар іскерліктер мен дағдыларды қолданудың шегін едәуір кеңейтетіндіктен, инновацияларға үндеу жасауды көздейді. Заманауи ЖОО-ның білім беру кеңістігіне смарт-технологиялар сияқты инновацияның қосылуы жан-жақты оқуға көшудің құндылығына себепші болады. Студенттердің жаңа білім беру технологияларының саласына сіңуі бұрын жасырын шығармашылық және зияткерлік ресурстарды өзектендіреді, зерттеу қызметіне ынталандырады, танымдық қызығушылықтың деңгейін арттырады. SMART технологияларға негізделген адаптивті білім беру жүйесі бар тұжырымдамалық модель екі ықтимал жолмен пайдаланылуы мүмкін. Біріншісі, автоматтандыруға болатын қайталанатын элементтерді оңтайландыру арқылы дәстүрлі оқу процесін өзгертудің қосымша құралы ретінде. Екіншіден, оқытудың жаңа әдістерін, мысалы, электрондық оқыту, мобильді оқыту, аралас оқыту және басқаларын енгізу арқылы модернизациялау. Жүйені енгізу нәтижесінде оқытушыға бағытталған оқу процесі оқушыға ауыстырылады. Осыған қарамастан, оқытушының рөлі кемімейді, керісінше SMART технологияларды қолдана отырып, мұғалім өзінің әлеуетін дамыта алатыны ерекше атап өтіледі. Бұл өз кезегінде студенттердің осы білім беру жүйесінде алған білім сапасына оң әсер етеді.

Түйінді сөздер: электронды оқыту, онлайн бағалау, бейімделгіш оқыту, бейімделгіш бағалау, бейімделгіш тестілеу, білім ағашы, смарт технологиялар, мобильді оқыту, граф теориясы

Сведения об авторах:

Бекаулова Жансая Мұхамедиқызы, PhD, лектор кафедры компьютерной инженерии и информационной безопасности Международного университета информационных технологий.

Мауленов Елжан Серикулы, PhD, докторант 3 курса Международного университета информационных технологий.

Дузбаев Нуржан Токкужаевич, PhD, ассоциированный профессор кафедры компьютерной инженерии и информационной безопасности Международного университета информационных технологий.

Дайнеко Евгения Александровна, PhD, ассистент-профессор кафедры компьютерной инженерии и телекоммуникаций Международного университета информационных технологий.

Маматова Гульнар Угизбаевна, к.ф.-м.н., ассоциированный профессор, Казахский Национальный университет им. аль-Фараби.

About authors:

Bekaulova M. Zhansaya, PhD, lecturer, Computer Engineering and Information Security Department, International Information Technology University.

Maulenov S. Yelzhan, PhD, 3rd year doctoral student, International Information Technology University.

Duzbayev T. Nurzhan, PhD, associate-professor, Computer Engineering and Information Security Department, International Information Technology University.

Yevgeniya A. Daineko, PhD, assistant-professor, vice-rector for international and scientific affairs, International Information Technology University.

Mamatova U. Gulnar, Ph.D., associate professor, Al Farabi Kazakh National University.

УДК 530.1, 681.3.06

Дайнеко Е.А.*, Закирова Г.Д., Ипалакова М.Т., Цой Д.Д., Сейтнур А.М.

Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НОВЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ РАЗРАБОТКИ ОБУЧАЮЩИХ ПРОГРАММ

Аннотация. *В статье рассмотрено применение ИТ в сфере высшего образования. Проведен анализ внедрения инновационных разработок для обучения, а также преимущества и возможности применения образовательных ресурсов с использованием ИТ. Представлен собственный программный продукт, позволяющий изучать физику с помощью современных ИТ. Подобный подход позволил сделать взаимодействие с приложением более интересным и запоминающимся, а обучение более эффективным. В качестве платформы разработки была выбрана межплатформенная среда Unity 3D. Основной функционал был написан на C#. Графические модели создавались при помощи Substance Painter. Также приведен опыт работы в международных проектах для повышения качества учебных программ. Показано, что использование новых ИТ при обучении открывают новые перспективы для их широкого применения на разных этапах обучения в учебных заведениях различных уровней.*

Ключевые слова: *ИТ, образование, университет, виртуальные лаборатории, Unity 3D.*

Введение

В современном мире информационные и коммуникационные технологии (ИКТ) стали обычным явлением во всех сферах жизни и образование не является исключением. Основные преимущества ИКТ при обучении: наличие и доступность онлайн-источников, гибкое распределение времени и места, что позволяет учащимся получить доступ к онлайн-материалам в любое время и из любого места, которое они предпочитают. ИКТ обладают принципом наглядности, позволяя предоставить визуальное и звуковое сопровождение. Например, различного рода электронные визуализаторы сегодня активно используются в области физики и химии, позволяя изучать и исследовать явления, не видимые человеку невооруженным глазом [1, 2, 3, 4]. Использование ИКТ особенно оправдано для организации дистанционного обучения, позволяющего работающим людям или людям с ограниченными возможностями получить доступ к образованию. Это помогает сделать взаимодействие между преподавателями и студентами более интенсивным, обучение более интерактивным, а значит более глубоким и эффективным [5, 6]. ИКТ позволяют организовать индивидуализацию обучения путем выстраивания индивидуальной программы освоения необходимого учебного материала, располагая доступом к базам данных и к преподавателю для консультаций, осуществляя самопроверку через соответствующие системы контроля знаний.

Проблема широкого применения ИКТ в сфере высшего образования в последнее десятилетие вызывает повышенный интерес. Так, в [7] рассмотрено использование ИКТ кыргызскими учащимися и учителями. Целью исследования являлось изучение восприятия учащихся и преподавателей в отношении использования ИКТ на курсах естествознания, технологии, инженерии и математики (STEM) в средних школах Кыргызской Республики. В [8] исследование направлено на разработку модели барьеров для интеграции цифровых технологий в преподавание в университетах. Разработанная модель поможет организациям и учителям определить и преодолеть как конкретные барьеры, так и их связь с другими факторами, улучшая интеграцию цифровых технологий в высшее образование. В [9] представлено применение методологии для оценки пригодности, принятия и использования инструментов информационных технологий (ИТ) для отдельных учащихся при изучении дизайна для взаимодействия человека с компьютером (HCI) в университетах Литвы. Эта методология может быть использована в реальных жизненных ситуациях, когда учителя должны помогать учащимся применять инструменты ИТ, являющиеся наиболее подходящими, приемлемыми и пригодными для их нужд, и, таким образом, повышать мотивацию учащихся, что, в свою очередь, создает условия для лучшего и более эффективного обучения. В [10] изучались преимущества использования виртуальной реальности (VR) в различных сценариях. VR обладает большим потенциалом и ее применение в образовании в последнее время вызывают большой исследовательский интерес. Тем не менее, в настоящее время существует мало систематической работы о том, как исследователи применяют иммерсивную VR в системе высшего образования. В статье авторов из Университета Матарама [11] описывается виртуальная лаборатория по комплексу электричества. Их целью было создать альтернативный лабораторный комплекс из-за ограниченного оборудования. Разработанные лабораторные работы повысили вовлеченность студентов и их словесно-образное творчество. Авторы работы [12] описали виртуальную лабораторию с интерактивным моделированием биомассы для выработки энергии. Он был создан для магистрантов распределенной возобновляемой энергетики. В результате авторы получают обратную связь от студентов о виртуальной лаборатории как отличном подготовительном инструменте. Электронное обучение является революционной силой в медицинском образовании, особенно для стран с ограниченными ресурсами, которые все еще страдают из-за острой нехватки работников здравоохранения. Например, в [13] показано, что в странах Африки электронное обучение для медицинского образования направлено на укрепление системы здравоохранения с целью удовлетворения потребностей населения в медицинской помощи. При этом электронное обучение должно устойчиво интегрироваться в местную образовательную среду и согласовываться с национальными приоритетами. Во многих исследованиях были предприняты попытки для разработки различных аспектов цифрового разрыва, в том числе доступ к ИКТ, использование ИКТ и результаты ИКТ. В [14] была построена концептуальная основа цифровых различий для префектурных городов в Китае, рассматриваемая пространственная агломерация с использованием кластерного анализа и изучены ведущие корреляты с использованием модели географически-взвешенной регрессии (GWR). Исследование показало, что ведущими детерминантами цифрового разрыва являются городской жилой доход, общий коэффициент охвата средним образованием, доход в сельской местности и население трудоспособного возраста. Это указывает на то, что для улучшения использования ИКТ и результатов необходимо решить не институциональные и инновационные аспекты, а социально-экономические проблемы.

Таким образом, новые ИКТ создают условия для полноценной реализации основных традиционных принципов, коренным образом изменяя весь образовательный процесс.

Результаты

Международный университет информационных технологий имеет опыт разработки электронных обучающих систем. Так, авторами была разработана виртуальная лаборатория, представляющая собой комплекс лабораторных работ по физике на базе фреймворка .NET XNA с использованием 3D-компьютерного моделирования на казахском, русском и английском языках, объединенных в виртуальную физическую лабораторию [15, 16]. Виртуальная лаборатория успешно применяется в процессе преподавания дисциплины «Физика» для студентов Международного университета информационных технологий по техническим специальностям. В дальнейшем лаборатория может использоваться в процессе обучения студентов любых специальностей, у которых физика является обязательным предметом.

Рисунок 1 – Интерфейс главного меню приложения виртуальной физической лаборатории с элементами 3D-компьютерного моделирования с пятью лабораторными работами в составе

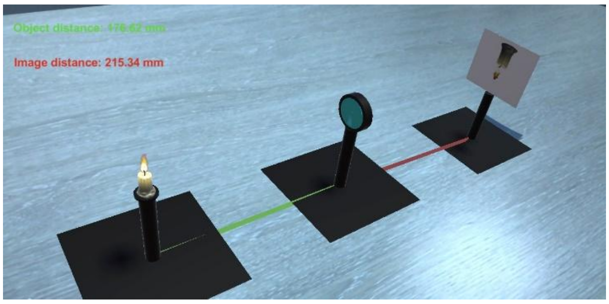
В АО «МУИТ» было разработано программное приложение «Электронная лаборатория (E-lab)», которая реализована в виде приложения с набором практических заданий, лабораторных работ, анимаций и теоретических заданий для изучения физики в средних учебных заведениях с использованием технологий дополненной и виртуальной реальности. Данное приложение может применяться не только в Казахстане, но и за рубежом, так как меню приложения реализовано на трех языках: казахский, русский и английский языки (рисунок 2).

a) b)

Рисунок 2 – «Электронная лаборатория (E-lab)»

На рисунке 3 показано мобильное приложение, использующее технологию дополненной реальности с набором практических заданий, экспериментов, анимаций и тестовых вопросов по физике. Пользователю предоставляется возможность перемещаться в пространстве задания и наблюдать за его имитацией с любых позиций или углов обзора, что в свою очередь улучшает восприятие и усвоение изучаемого материала. Такое применение дополненной реальности положительно влияет на мотивацию, внимание, концентрацию и дисциплину студентов. Также можно проверить знания с помощью тестов с несколькими вариантами ответов.

a)



b)

Рисунок 3 – Мобильное приложение для изучения физики

Наряду с созданием виртуальных лабораторий в определенной области, АО «МУИТ» использует возможности европейских и других международных программ для продвижения «Технологически усовершенствованного обучения» (TEL), которое используется не только для описания применения технологий в преподавании и обучении, но также преобразовывает учреждения образования до неузнаваемости. TEL образование может быть синонимом электронного обучения. Целью TEL является предоставление социальных и технических инноваций для методов обучения как для отдельных лиц, так и для организаций. TEL и E-Learning могут использоваться как синонимы, даже если существуют значительные различия. Образование можно рассматривать как процесс или как систему, которая поддерживает и обеспечивает обучение и подготовку. В случае TEL образования изучается потенциальное влияние информационных технологий, которые могут охватывать способы интеграции технологии в учебное заведение или в систему поддержки процессов преподавания и обучения, например использование обратной связи со студентами онлайн или результаты оценки преподавателя, при этом обе оценки можно рассматривать так, чтобы можно было увидеть общие успехи и недостатки.

По сути, технологии в значительной степени выполняют то, что было сделано ранее без технологий. Задача состоит в том, чтобы обучить следующее поколение, ответственное за создание и распространение новых технологий, которые облегчают образовательный процесс, делая его более осмысленным и быстрым в соответствии с международными стандартами. А международные проекты, в частности европейская программа Erasmus +, способствует разработке новых подходов и методологий. Проект программы Erasmus + KUTEL – «Казахстанские университеты для содействия процессам обеспечения качества в обучении с использованием технологий» направлен на обеспечение качества курсов и модулей, основанных на TEL. Его основная цель заключается в содействии реформированию и модернизации высшего образования в Казахстане путем внедрения национальной системы обеспечения качества для обучения с использованием технологий. Интеграция и внедрение методов улучшения технологии обучения (TEL) улучшат, разработают/реализуют руководящие принципы и процедуры для обеспечения качества учебных программ.

Влияние и эффективное изменение обеспечивается проектом посредством тренингов, которые обеспечивают консолидированные профессиональные навыки по обеспечению качества преподавательского состава, модернизации образовательных процессов и подготовку административного состава учреждений образования, ответственных за аккредитацию и оценку качества высшего образования. Обучение повысит компетенции персонала для улучшения соотношения EU/KZ стандартизированной системы обеспечения качества; определения национальных стандартов для TEL с учетом ссылок по обеспечению качества и рекомендаций, разделяемых с Министерством образования и науки, а также с учреждениями высшего образования.

МУИТ разработал свои модули для продвижения учебных программ, тем самым способствуя технологизации процесса обучения, используя для этого недавно созданную мультимедийную лабораторию KUTEL, которая вносит значительный вклад в переход к онлайн-обучению.

Недавно члены команды проекта записали новые лекции для онлайн-обучения. Одним из них является лекция «Контроль качества мультимедийных продуктов (с акцентом на нужды студентов с особыми потребностями)». Лекция основана на использовании мультимедиа, которое определяется как любая комбинация текста, графики, звука, видео и анимации. Мультимедиа может быть доставлена пользователю с помощью электронных или цифровых средств управления. Чтобы создать хороший мультимедийный проект, вы должны быть креативными, техническими, организационными и иметь деловые навыки. Авторы (Дузбаев Н., Мишина А.) особо подчеркивали потребности учащихся с ограниченными возможностями, помогая им быть такими же успешными, как и обычные студенты.

Вторая лекция, разработанная преподавателями Рахметуллаевой С. и Сербином В., посвящена теме «Совместная виртуальная среда» (CVE), и объясняет, что совместная виртуальная среда – это пространство, в котором несколько человек взаимодействуют друг с другом, часто находясь в различных местах. Цель состоит в том, чтобы эти люди обменивались идеями и опытом в среде сотрудничества – отсюда и название. Совместные виртуальные среды используются для совместной работы и взаимодействия многих участников, которые могут распространяться на большие расстояния. Типичными примерами являются распределенное моделирование, многопользовательские 3D-игры, программное обеспечение для совместной разработки и другие. Приложения обычно основаны на общей виртуальной среде. В связи с распределением участников и задержками в связи, некоторые модели согласованности данных должны использоваться для обеспечения именно для согласования данных.

Электронное обучение обеспечивает связь между людьми и ресурсами с помощью коммуникационных технологий для целей, относящихся к обучению. Онлайн-обучение в терминах этого определения относится к действиям, которые осуществляются через Интернет. И, конечно же, значительная часть роста активности в области электронного обучения обусловлена феноменальным ростом Интернета, мобильных приложений и технологий в целом.

Заключение

Очевидно, что в дальнейшем количество студентов, использующих на занятиях переносные персональные компьютеры, будет увеличиваться так же, как и уровень использования ими современных технологий. Соответственно, нужно использовать этот потенциал для модернизации учебного процесса и индивидуализации в обучении. При этом образовательные учреждения должны быть готовы к построению учебного процесса с использованием ИКТ.

Влияние ИКТ на трансформацию учебного процесса постоянно растет. Авторы считают, что использование новейших технических средств помогает создавать совершенно другие, оригинальные по своей структуре обучающие программы, интересные нынешнему поколению студентов и учащихся иных учебных заведений. В настоящее время авторами ведется постоянная работа по разработке новых практических заданий и их интеграции в состав лаборатории.

Работа выполнена при финансовой поддержке КН МОН РК по программе грантового финансирования научных исследований на 2018-2020 гг., грант №AP05135692.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yevgeniya Daineko, Madin Ipalakova, Dana Tsoy, Akmedi Shaipiten, Zhiger Bolatov, Tolganay Chinibayeva. Development of practical tasks in physics with elements of augmented reality for secondary educational institutions // proceedings of the fifth international conference, augmented and virtual reality (avr) 2018, otranto, Italy, june 24-27, 2018, part 1, lncs 10850, Pp. 404-412.
2. Wang H. Application of virtual reality technology in physics experiment teaching //2018 international conference on mechanical, electronic, control and automation engineering (mecae 2018). – atlantis press, 2018.
3. Cathi L. Dunnagan, Devran A. Dannenberg, Michael P. Cuales, Arthur D. Earnest, Richard M. Qurnsey, and Maria T. Gallardo-Williams. Production and evaluation of a realistic immersive

virtual reality organic chemistry laboratory experience: infrared spectroscopy. Journal of chemical education, 2020, vol. 97, p. 258−262
4. Bosede Iyiade Edwards, Kevin S. Bielawski, Rui Prada, Adrian David Cheok. Haptic virtual reality and immersive learning for enhanced organic chemistry instruction. Virtual Reality, Vol. 23, pages 363–373(2019).
5. José María Fernández-Batanero, Borja Sañudo, Marta Montenegro-Rueda and Inmaculada García-Martínez. Physical Education Teachers and Their ICT Training Applied to Students with Disabilities. The Case of Spain. Sustainability 2019, 11, 2559
6. Pacheco, E., Lips, M., & Yoong, P. ICT-enabled self-determination, disability and young people. Information, Communication & Society, 1–16. (2017)
7. Gülgün Afacan Adanır, Bakit Borkoev, Kalipa Saliyeva, Gulshat Muhametjanova. Kyrgyz learners' and teachers' experiences and perceptions related to ICT use in high school courses. Education and Information Technologies. MAY 2020
8. Cristina Mercader. Explanatory model of barriers to integration of digital technologies in higher education institutions. Education and Information Technologies. MAY 2020
9. E. Kurilovas, S. Kubilinskiene. Lithuanian case study on evaluating suitability, acceptance and use of IT tools by students – An example of applying Technology Enhanced Learning Research methods in Higher Education. Computers in Human Behavior. Volume 107, June 2020, 106274
10. Jaziar Radianti, Tim A. Majchrzak, Jennifer Fromm, Isabell Wohlgenannt. A Systematic Review of Immersive Virtual Reality Applications for Higher Education: Design Elements, Lessons Learned, and Research Agenda. Computers & Education, Volume 147, April 2020, 103778
11. Gunawan G. et al. Virtual laboratory of electricity concept to improve prospective physics teachers creativity//Jurnal Pendidikan Fisika Indonesia. – 2017. – Vol.13. – №. 2. – pp. 102-111
12. Redel-Macías M. D. et al. Virtual laboratory on biomass for energy generation //Journal of Cleaner Production. – 2016. – Vol. 112. – pp. 3842-3851
13. S. Barteit et al. E-Learning for Medical Education in Sub-Saharan Africa and Low-Resource Settings: Viewpoint. JOURNAL OF MEDICAL INTERNET RESEARCH. Vol 21, No 1 (2019)
14. Zhouying Song, Chen Wang, Luke Bergmann. China's prefectural digital divide: Spatial analysis and multivariate determinants of ICT diffusion. International Journal of Information Management. Volume 52, June 2020, 102072
15. Daineko, Ye., Dmitriyev, V. and Ipalakova, M. Using Virtual Laboratories in Teaching Natural Sciences: An Example of Physics // Computer Applications in Engineering Education, Volume 25, Issue 1, January 2017 – P. 39-47
16. Daineko, Y.A., Ipalakova, M.T., and Bolatov, Zh.Zh. Employing Information Technologies Based on .NET XNA Framework for Developing a Virtual Physical Laboratory with Elements of 3D Computer Modeling // Programming and Computer Software, Volume 43, Issue 3, May 2017 – P. 161-171

REFERENCES

1. Use UI Automation to test your code, "Microsoft," https://msdn.microsoft.com/en-us/library/dd286726.aspx.
2. C# Graphical User Interface Tutorial, https://csharp.net-informations.com/gui/gui_tutorial.htm.
3. Dwyer, D.C. Learning in the age of technology // Proceedings of the Leadership in Education and Technology Association Conference, 1994, Adelaide, Australia
4. Blythe, M., Hassenzahl, M., and Wright, P. Introduction: Beyond fun // Interactions – Funology. – 2004. – №11 (5). – P. 36-37.
5. Jakob Nielsen. Heuristic Evaluation http://www.sccc.premiumdw.com/readings/heuristic-evaluation-nielson.pdf

Дайнеко Е.А., Закирова Г.Д., Ипалакова М.Т., Цой Д.Д., Сейтнур А.М.

Оқыту бағдарламаларын әзірлеу үшін жаңа ақпараттық технологияларды пайдалану

Аңдатпа: Мақалада жоғары білім беру саласында АТ қолдану қарастырылған. Оқыту үшін инновациялық әзірлемелерді енгізуге, сондай-ақ АТ пайдалану арқылы білім беру ресурстарын қолданудың артықшылықтары мен мүмкіндіктеріне талдау жүргізілді. Заманауи АТ көмегімен физиканы үйренуге мүмкіндік беретін жеке бағдарламалық өнім ұсынылған. Мұндай тәсіл қолданбамен өзара іс-қимылды қызықты және есте қаларлықтай етіп, оқыту тиімдірек етуге мүмкіндік берді. Әзірлеу платформасы ретінде Unity 3D платформа аралық ортасы таңдалды. Графикалық модельдер Substance Paint көмегімен жасалды. Сондай-ақ, оқу бағдарламаларының сапасын арттыру үшін халықаралық жобалардағы жұмыс тәжірибесі келтірілген. Оқыту кезінде жаңа АТ-ны пайдалану әртүрлі деңгейдегі оқу орындарында оқытудың сан түрлі кезеңдерінде оларды кеңінен қолдану үшін жаңа перспективалар ашатыны көрсетілген.

Түйінді сөздер: АКТ, білім, университет, виртуалды зертханалар, Unity 3D

Y.A. Daineko, Zakirova G.D., M.T. Ipalakova, D.D. Tcoy, A.M. Seitnur

Using new information technologies to develop training programs

Abstract. The article discusses the use of IT in higher education. An analysis of the implementation of innovative developments for training, as well as the advantages and opportunities of using educational resources using IT. We present our own software product that allows you to study physics with the help of modern IT. This approach made interaction with the app more interesting and memorable, and training more effective. The cross-platform Unity 3D environment was chosen as the development platform. The main functionality was written in C#. Graphic models were created using Substance Painter. Experience in working in international projects to improve the quality of training programs is also given. It is shown that the use of new IT in training opens up new prospects for their wide application at different stages of training in educational institutions of different levels.

Key words: ICT, education, University, virtual laboratories, Unity 3D

Сведения об авторах:

Дайнеко Е.А., PhD, ассистент-профессор кафедры компьютерной инженерии и телекоммуникаций Международного университета информационных технологий.

Закирова Г.Д., PhD, ассоциированный профессор кафедры языков Международного университета информационных технологий.

Ипалакова М.Т., к.т.н., ассистент-профессор кафедры компьютерной инженерии и телекоммуникаций Международного университета информационных технологий.

Цой Д.Д., магистр, инженер-лаборант лаборатории смешанной реальности Международного университета информационных технологий.

Сейтнұр А.М., магистр, тьютор кафедры Радиотехники, электроники и телекоммуникаций Международного университета информационных технологий.

About authors:

Yevgeniya A. Daineko, PhD, assistant-professor, Computer Engineering and Telecommunication Department, International Information Technology University.

Gulnara D. Zakirova, PhD, associate professor, Language Department, International Information Technology University.

Madina T. Ipalakova, cand. of tech. sci., assistant-professor, Computer Engineering and Telecommunication Department, International Information Technology University.

Dana D. Tcoy, M.Eng.&Tech., laboratory engineer at the mixed reality lab, International Information Technology University.

Aigerim M. Seitnur, M.Eng.&Tech., tutor, Radioengineering, electronics and Telecommunication Department, International Information Technology University.

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

UDK 004.934

Aitim A.K.*, Satybaldiyeva R.Zh.

*International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan

ANALYSIS OF METHODS AND MODELS FOR AUTOMATIC PROCESSING SYSTEMS OF SPEECH SYNTHESIS

Abstract. *The article considers the current state of models and methods of speech synthesis. Their advantages and disadvantages are presented, as well as metrics for the quality of speech synthesis. The method of speech synthesis by rules is based on a programmed knowledge of acoustic and linguistic limitations and does not directly use elements of human speech.*

Key words: *Speech synthesis, speech recognition, model of speech synthesis, quality metrics, TTS.*

Introduction

Artificial creation of human speech has long been of interest to scientists and practical researchers. The tasks facing speech synthesizers have changed significantly over time. Speech synthesis has evolved from simply producing speech-like sounds and voicing a limited set of phrases to voicing any text with the desired intonation and emotional coloring, and in a voice, that accurately imitates the speech of a person. If we consider the synthesizer not just as a tool for pronouncing certain texts, but as part of the speech interface system for communication between a person and a computer, then it currently faces even more complex tasks. For example, the so-called 'reactive' synthesis must track the effect it has on the listener and change its characteristics accordingly. A pertinent problem today is also multi-language adaptive speech synthesis, that is, speech synthesis in different languages by the voice of a single speaker, who may not even know the target language.

Speech is the main means of communication between people. Speech synthesis, the automatic generation of speech signals, has been developed for several decades [1]. Subsequent advances in speech synthesis have created synthesizers with very high intelligibility, but sound quality and naturalness are still a serious problem. However, the quality of existing products has reached an adequate level for several applications, such as multimedia and telecommunications. With some audiovisual information or facial animation, speech intelligibility can be significantly improved [2].

The text-to-speech synthesis (TTS) procedure consists of two main stages. The first is text analysis, where the input text is transcribed into a phonetic or some other linguistic representation, and the second is speech signal generation, when an acoustic output is created based on this phonetic and prosodic information. These two phases are usually referred to as high-level and low-level synthesis. A simplified version of the procedure is shown in Fig. 1. Input text can be, for example, data from a word processor, standard ASCII from an email, a mobile text message, or scanned text from a newspaper. The character string is then pre-processed and analyzed into a phonetic representation, which is usually a string of phonemes with some additional information for correct intonation, duration, and stress. The speech sound is finally generated using a low-level synthesizer based on information from a high-level synthesizer.

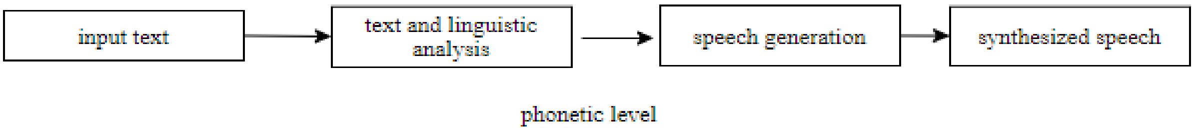


Figure 1 - Simple procedure to convert text to speech

The easiest way to create synthesized speech is to play long pre-recorded samples of natural speech, such as individual words or sentences. This method of combining provides high quality and naturalness but has a limited vocabulary and usually only one voice. The method is very suitable for some information and information systems. However, there is no database of all the words and common names in the world. It may even be inappropriate to call this speech synthesis because it contains only recordings. Thus, for unlimited speech synthesis (text-to-speech conversion), we must use shorter fragments of the speech signal, such as syllables, phonemes, diphones, or even shorter segments.

Another widely used method for creating synthesized speech is formant synthesis, which is based on the speech filter model of the production source. This method is sometimes called terminal analogy because it simulates only the sound source and formant frequencies, and not any physical characteristics of the vocal tract [3]. The excitation signal can be voiced with a basic frequency (F0) or non-vocalized noise. The mixed arousal of these two can also be used for voiced consonants and some aspiration sounds. The arousal is then obtained and filtered by a voice path filter that consists of resonators like natural speech formats.

Theoretically, the most accurate method for creating artificial speech is direct modeling of the human speech production system [4]. This method, called articulatory synthesis, typically involves models of the human articulators and vocal cords. Articulators are usually modeled using a set of functions for small tube sections. The vocal cord model is used to generate the corresponding excitation signal, which can be, for example, a two-mass model with two vertically moving masses [5]. Articulation synthesis promises high-quality synthesized speech.

All synthesis methods have their own advantages and problems, and it is quite difficult to say which method is the best. With concatenative and formant synthesis, very promising results have been achieved recently, but articulation synthesis may also emerge as a potential method in the future. Various synthesis methods, algorithms, and methods will be discussed in more detail later.

Implementation of speech synthesis

Speech synthesis is the creation of sound based on text. Speech synthesis may be required in all cases when the recipient of information is a person. The quality of a speech synthesizer is primarily judged by its similarity to the human voice, as well as its ability to be understood.

A wide variety of speech synthesis methods are currently available. There are two main factors that determine the choice of synthesis technology in an implementation:

1. Task. Depending on the requirements for the quality of the final product, the capabilities of synthesized speech vary. The simplest synthesized speech can be created by combining parts of recorded speech that will be stored in a database. Of course, if you need to synthesize a complex text, this method cannot be used, since at the junction of the composed sound fragments, there may be intonation distortions and breaks that are noticeable to the ear. In addition, you will need a very large database to store all the necessary audio fragments.

2. The structure of the language. The main phonological laws, stress rules, morphological and syntactic structures are used in constructing the output speech wave.

3. Technological capabilities. First, this is the amount of memory available for the information system. Depending on the amount of stored synthesized vocabulary, both its complexity and the quality of the resulting signal change. The computing power of the device plays an equally im-

portant role in choosing the method. Choosing a complex speech synthesis method, coupled with low hardware performance, will result in a huge amount of computing time.

Speech synthesizers are generally divided into two types: with a limited and unlimited dictionary. In devices with a limited dictionary, speech is stored in the form of words and sentences that are output in a certain sequence when synthesizing a speech message.

The main methods with a limited dictionary are the compilation synthesis model and parametric representation. [6]

2. Quality metrics

Before talking about which models of speech synthesis are better, we need to determine the quality metrics that will be used for comparing algorithms.

Since the same text can be read in an infinite number of ways, there is no a priori correct way to pronounce a phrase. Therefore, metrics of speech synthesis quality are often subjective and depend on the listener's perception.

The standard metric is the MOS (mean opinion score), an average rating of natural speech given by assessors for synthesized audio on a scale from 1 to 5. One means a completely improbable sound, and five means speech that is indistinguishable from human speech. Real people's records usually get values of about 4,5, and a value greater than 4 is considered high enough. Speech synthesis works as follows. The first step to building any speech synthesis system is to collect data for training. Usually these are high-quality audio recordings where the announcer reads specially selected phrases. The approximate size of the dataset required for training unit selection models is 10-20 hours of pure speech [7], while for neural network parametric methods, the upper estimate is approximately 25 hours [10, 11].

Today, speech synthesis problems are solved mainly using two approaches:

- Unit selection [8], or the compilation approach. It is based on merging fragments of recorded audio. Since the late 90's, it has long been considered the de facto standard for developing speech synthesis engines. For example, a voice using the unit selection method can be found in Siri [7].

- Parametric speech synthesis [9], the essence of which is to construct a probabilistic model that predicts the acoustic properties of an audio signal for a given text.

The speech of unit selection models (Fig. 2) is of high quality, low variability, and requires a large amount of data for training. At the same time, much less data is needed to train parametric models, they generate more diverse intonations. The compilation synthesis model assumes speech synthesis by concatenating recorded samples of individual sounds voiced by the speaker (Fig. 2).

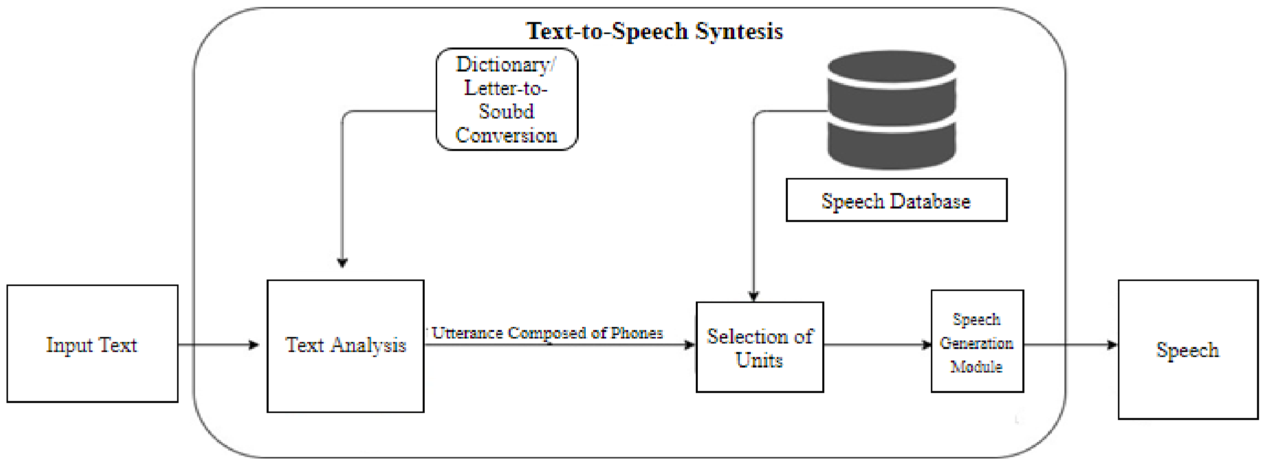


Figure 2 - Model of compiled synthesis or unit selection

The compilation synthesis model assumes speech synthesis by concatenating recorded samples of individual sounds uttered by the speaker.

When using this model, a database of audio fragments is compiled, from which speech will be synthesized in the future. The size of the synthesis elements is usually no less than a word.

Usually, the recorded speech of the speaker cannot cover all possible cases in which synthesis will be used. Therefore, the essence of the method is to split the entire audio database into small fragments called units, which are then glued together using minimal post-processing. The units are usually minimal acoustic units of the language, such as semitones or diphones [7].

Parametric speech synthesis

To solve two main problems of compilation synthesis, a parametric type of signal has been developed that is abstracted from the speech wave, which represents certain parameters. This approach reduces the amount of memory required for the dictionary and provides more flexibility compared to the compiled model.

Parameters display the most characteristic information or time or frequency zones. One way to configure it is to display the speech wave with the addition of individual harmonics at a given frequency.

Another variant of parametric vision of the speech path is artificial speech, creating the necessary set of formant resonances. This system works with the settings of the main tone and formants.

Formants are an economical way to store speech information, more than by reducing the required amount of memory compared to the compiled method.

The second advantage of this approach is its inherent flexibility. Semantic information consists of formants and the melody (intonation, speech dynamics, etc.) at the stage of the main tone and during the temporary division of speech, which allows you to divide what is pronounced and how the formant representation is pronounced. [9]

Thus, the formant approach requires less memory than the compiler, but it requires large calculations to reproduce the initial speech signal. Appropriate digital techniques and knowledge of speech formation models are required, but the linguistic structure of the language is not used.

The parametric approach is based on the idea of creating a probable model that estimates the propagation of acoustic features of a given text.

The full synthesis according to the rules

When synthesizing speech according to rules, the compilation and parametric encoding methods are also used, but at the syllable level.

In search of a compromise between the flexibility of full speech synthesis by rules and its cost-effectiveness, speech synthesis by rules using pre-memorized segments of natural language was developed.

This method is a variation of the conventional synthesis by the rules. Depending on the size of the initial synthesis elements, the following types of synthesis are distinguished: microsegment (microwave); allophonic; diphonic; semi-syllabic; syllabic; synthesis from units of any size.

Usually, these elements are used as semi-syllables-segments containing half of a consonant and half of a vowel adjacent to it.

The quality of this synthesis does not match the quality of natural speech, because distortions often occur at the borders of the cross-linking of diphones. Compiling speech from pre-recorded word forms also does not solve the problem of high-quality synthesis of arbitrary messages since words change depending on the type of phrase and the place of the word in the phrase. This position does not change even when using large amounts of memory to store word forms. However, this method of speech generation will give a higher quality sound output, compared to the simple method of synthesis by rules.

Conclusion

Today, speech synthesis is widely used in various areas of infrastructure. There are a small number of libraries for high-level programming languages that allow you to use the technologies described above without resorting to a large amount of hardware power since the speech synthesis service itself is located on a cloud server. With the development of this direction, it will be almost impossible to distinguish artificial speech from a human speech in the future.

The paper considered the current state of models and methods of speech synthesis. Their advantages and disadvantages are presented, as well as metrics for the quality of speech synthesis. The method of speech synthesis by rules is based on a programmed knowledge of acoustic and linguistic limitations and does not directly use elements of human speech.

To remember this information requires little memory, but to extract parameters from it, you need the knowledge of an expert. Text analysis is a linguistic task and includes the definition of basic phonetic, syllabic, morphemic and syntactic forms, plus the extraction of semantic information. Text-to-speech conversion systems are the most complex speech synthesis systems that include knowledge about the structure of the human speech apparatus and the linguistic structure of the language.

Thus, this method gives complete freedom to model parameters and allows you to reproduce almost any text; it significantly saves memory, without requiring the storage of a large amount of information. However, synthesized speech sounds worse than natural speech (and, as a rule, worse than synthesized speech by other methods described above); such a system is difficult to develop.

REFERENCES

1. Möbius B., Schroeter J., Santen J., Sproat R., Olive J. Recent Advances in Multilingual Text-to-Speech Synthesis. Fortschritte der Akustik, DAGA-96, 2012
2. Beskow J. Talking Heads - Communication, Articulation, and animation. Proceedings of Fonetik-96: 53-56, 2012
3. Flanagan J. Speech Analysis, Synthesis, and Perception. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2011
4. O'Saughnessy D. Speech Communication - Human and Machine, Addison-Wesley, 2011
5. Veldhuis R., Bogaert I., Lous N. Two-Mass Models for Speech Synthesis. Proceedings of Eurospeech, 2009
6. Sorokin, V.N. Synthesis of speech. —M .: Nauka, 1992. - 392 p.
7. T. Capes, P. Coles, A. Conkie, L. Golipour, A. Hadjitarkhani, Q. Hu, N. Huddleston, M. Hunt, J. Li, M. Neeracher, K. Prahallad, T. Raitio, R. Rasipuram, G. Townsend, B. Williamson, D. Winarsky, Z. Wu, H. Zhang. Siri On-Device Deep Learning-Guided Unit Selection Text-to-Speech System, Interspeech, 2017.
8. A.J. Hunt, A.W. Black. Unit selection in a concatenative speech synthesis system using a large speech database, ICASSP, 1996.
9. H. Zen, K. Tokuda, A. W. Black. Statistical parametric speech synthesis, Speech Communication, Vol. 51, no. 11, pp. 1039-1064, 2009.
10. Yuxuan Wang, RJ Skerry-Ryan, Daisy Stanton, Yonghui Wu, Ron J. Weiss, Navdeep Jaitly, Zongheng Yang, Ying Xiao, Zhifeng Chen, Samy Bengio, Quoc Le, Yannis Agiomyrgiannakis, Rob Clark, Rif A. Saurous. Tacotron: Towards End-to-End Speech Synthesis.
11. Jonathan Shen, Ruoming Pang, Ron J. Weiss, Mike Schuster, Navdeep Jaitly, Zongheng Yang, Zhifeng Chen, Yu Zhang, Yuxuan Wang, RJ Skerry-Ryan, Rif A. Saurous, Yannis Agiomyrgiannakis, Yonghui Wu. Natural TTS Synthesis by Conditioning WaveNet on Mel Spectrogram Predictions.
12. Ilya Sutskever, Oriol Vinyals, Quoc V. Le. Sequence to Sequence Learning with Neural Networks.
13. Aaron van den Oord, Sander Dieleman, Heiga Zen, Karen Simonyan, Oriol Vinyals, Alex Graves, Nal Kalchbrenner, Andrew Senior, Koray Kavukcuoglu. WaveNet: A Generative Model for Raw Audio.
14. Aaron van den Oord, Yazhe Li, Igor Babuschkin, Karen Simonyan, Oriol Vinyals, Koray Kavukcuoglu, George van den Driessche, Edward Lockhart, Luis C. Cobo, Florian Stimberg,

Norman Casagrande, Dominik Grewe, Seb Noury, Sander Dieleman, Erich Elsen, Nal Kalchbrenner, Heiga Zen, Alex Graves, Helen King, Tom Walters, Dan Belov, Demis Hassabis. Parallel WaveNet: Fast High-Fidelity Speech Synthesis.

15. Wei Ping Kainan Peng Jitong Chen. ClariNet: Parallel Wave Generation in End-to-End Text-to-Speech.

Әйтім Ә.Қ.*, Сатыбалдиева Р.Ж.

Сөйлеу синтезінің автоматты өңдеу жүйелерінің әдістері мен үлгілерін талдау

Аңдатпа: Мақалада сөйлеу синтезінің үлгілері мен әдістерінің қазіргі жағдайы талқыланады. Олардың артықшылықтары мен кемшіліктері, сонымен қатар сөйлеу синтезі сапасының өлшемдері қарастырылған. Ережеге негізделген сөйлеу синтезінің әдісі акустикалық және тілдік шектеулер туралы бағдарламаланған ақпаратқа негізделген және адамның сөйлеу элементтерін тікелей пайдаланбайды.

Түйінді сөздер: Сөйлеу синтезі, сөйлеуді тану, сөйлеу синтезінің үлгісі, сапа көрсеткіштері, TTS.

Әйтім Ә.Қ.*, Сатыбалдиева Р.Ж.

Анализ методов и моделей систем автоматической обработки синтеза речи

Абстракт. В статье рассматривается современное состояние моделей и методов синтеза речи. Представлены их достоинства и недостатки, а также метрики качества синтеза речи. Метод синтеза речи по правилам базируется на запрограммированном знании акустических и лингвистических ограничений и не использует непосредственно элементы человеческой речи.

Ключевые слова: синтез речи, распознавание речи, модель синтеза речи, метрики качества, TTS.

Сведения об авторах:

Әйтім Әйгерім Қайратқызы, магистр технических наук, сениор-лектор кафедры «Информационных систем», Международный университет информационных технологий.

Сатыбалдиева Рысхан Жакановна, кандидат технических наук, ассоциированный профессор кафедры «Информационные системы», Международный университет информационных технологий.

About authors:

Aigerim K. Aitim, master of technical sciences, senior-lecturer of the "Information Systems" department, International Information Technology University.

Ryskhan Zh. Satybaldiyeva, candidate of technical sciences, associate professor of the "Information Systems" department, International Information Technology University.

УДК 681.5

Хасенова Г.И.[1], Майлыбаев Е.Қ.[2], Умбетов У.У.[3], Исайкин Д.В.[4]

[1]Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті, Алматы, Қазақстан
[2]Қазақ қатынас жолдары университеті, Алматы, Қазақстан
[3] Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан, Қазақстан
[4] Қазақ қатынас жолдары университеті, Алматы, Қазақстан

МАШИНА ЖАСАУ ӨНДІРІСІНДЕГІ ҚҰРЫЛҒЫЛАРДЫҢ ТОРАПТАРЫН ЖОБАЛАУДЫ АВТОМАТТАНДЫРУ ЖҮЙЕЛЕРІ

Аңдатпа: *Бұл мақала құрылғылар құрылымын көлік жасау өндірісінде қолданылатын программалар арқылы талдау жасауға арналған. Сапаны арттыру үшін өнімнің негізгі параметрлерін оңтайландыру қажет. Пайдалы және өте қымбат емес бағдарламалық платформаны пайдалану маңызды және қазіргі заманғы тренд болып табылады. Құрылғыны жобалау кезінде интегралданатын бағдарламалар жаңа модульдер құруға мүмкіндік береді. Қазіргі заманғы басқару жүйелерінің құрылғы конструкциясының жеке бөліктерінің негізгі элементтерін талдау үшін бағдарламаларға шолу жасалды. Жобалауды Trace Mode бағдарламасы арқылы жүзеге асыру идеясы көрсетілді. Trace Mode өнімінде жаңа сапалы элементтерді жобалау және зерттеуге арналған модульдер бар екендігі көрсетілді.*

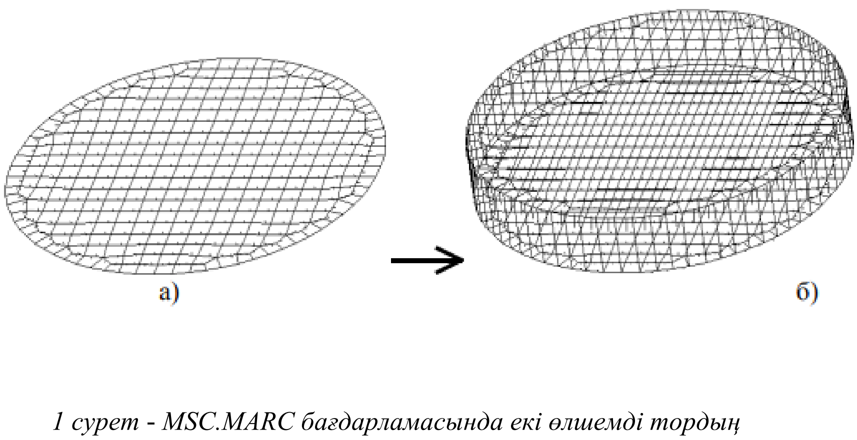
Түйінді сөздер*: жобалау, модельдеу, бағдарламалық жасақтама, талдау.*

Кіріспе

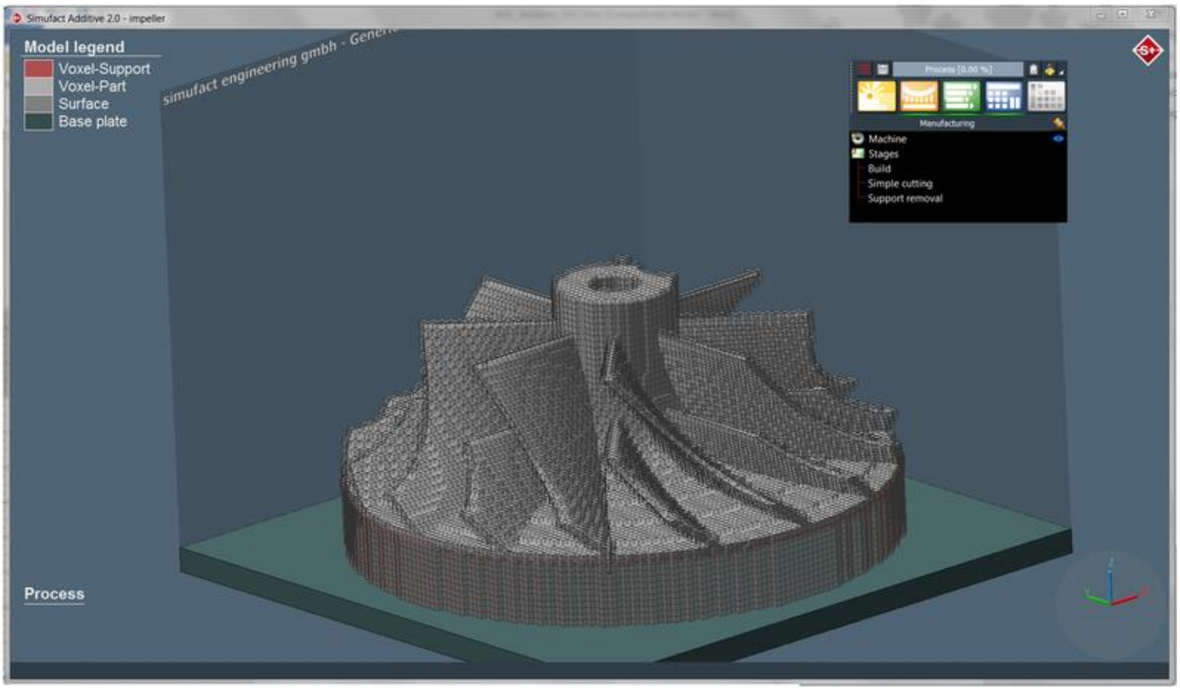
Машина жасау кәсіпорындарында өндірістік процесте компьютерлік технологияларды қолдану үлкен қаржылық салымдарды талап етеді. Сондықтан дұрыс шешімнің негізгі мақсаты зауыттағы өндірістік процесс үшін бағдарламалық платформаны дұрыс таңдау болып табылады. Компьютерлік әзірлемелерді енгізудің негізгі үрдісі нарықтағы жаңа шешімдерді қамтуы тиіс [1-2].

Машина жасаудағы материалдар үшін MSC бағдарламалық тобының өнімдерін қолдану

Қазіргі уақытта мультидисциплинарлық міндеттері бар зерттеулер жүргізілетін мультифизикалық модельдеу зертханасын құру өзекті мәселе болып табылады. Зертханада объект туралы толық ақпарат, 3D, желілік кеңістіктегі заманауи веб-орта, чаттардың атрибуттары, бейне және аудио, 3D - анимация түрінде пайдаланылады. Бірінші суретте MSC Software тобына кіретін бағдарламалардағы объектілерді кескіндеу көрсетілген.



1 сурет - MSC.MARC бағдарламасында екі өлшемді тордың бір қабатын үш өлшемді қабатқа түрлендіру

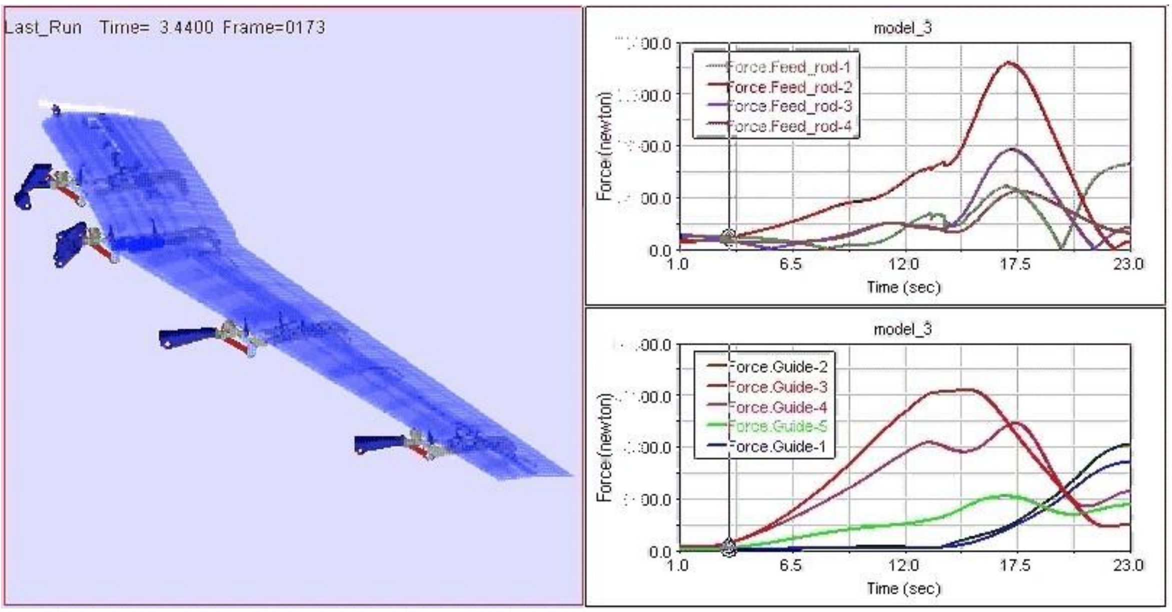


2 сурет - Simufact additive бағдарламасында арнайы воксельді тормен жасалған есептік үлгісі

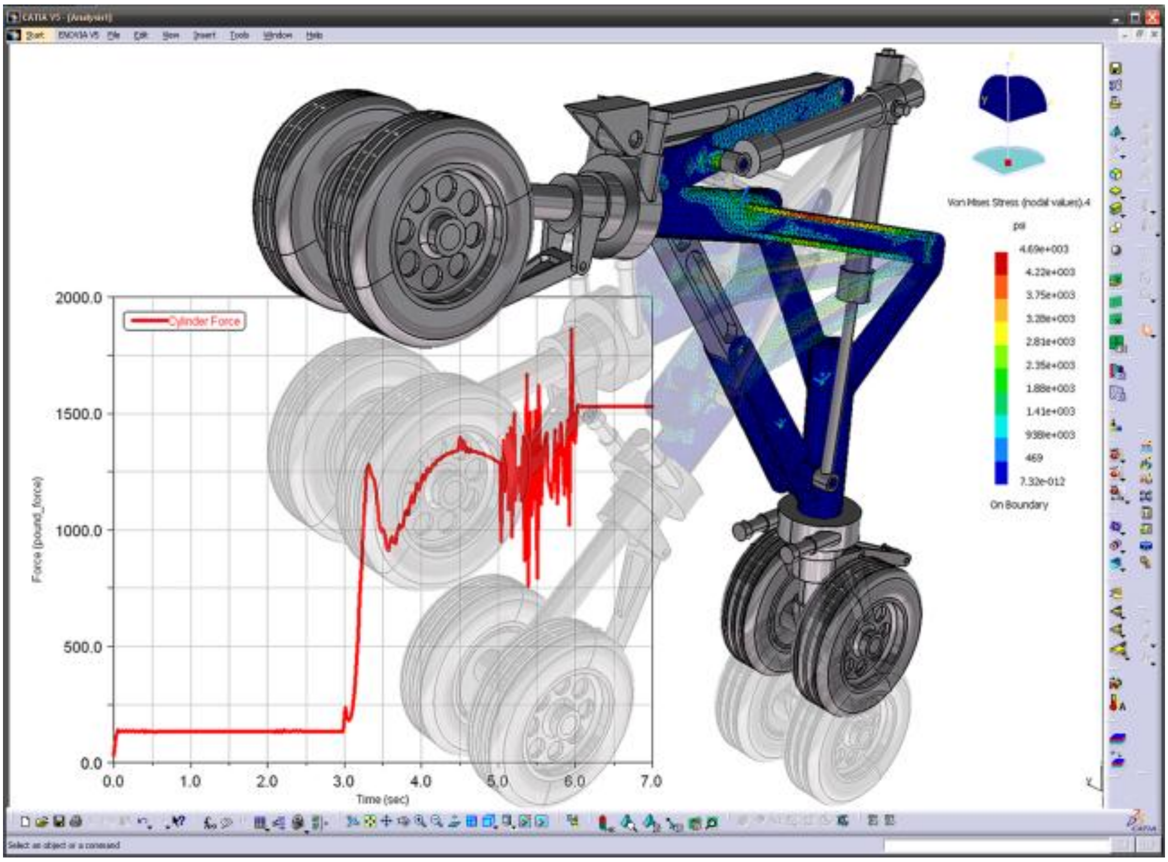
Екінші суретте Simufact additive бағдарламалық жасақтамасында қозғалтқыш фрагментін жобалау көрсетілген. Бұл бағдарлама төменгі деңгейлі бағдарламалармен жақсы үйлеседі және NASTRAN, PATRAN және т. б. сияқты жоғары деңгейлі бағдарламалармен қиындықсыз біріктіріледі.

Бөлшекті жобалау үшін MSC бағдарламалық жасақтамасын қарастырайық, мысал ретінде, Adams бағдарламасына тоқталайық. Үшінші суретте серпімді компоненттердің икемділігін ескере отырып, қанат механизациясының жұмысын Adams бағдарламасында модельдеу көрсетілген. Олар тораптық форматта жылу деректер блогының өрістерін жобалауға мүмкіндік береді. Бұл блокта параметрлер ретінде уақытты, температураны немесе басқа тәуелсіз айнымалыны көрсетуге болады. Marc бағдарламасы алдыңғы талдаудың нәтижелерін 2D-3D үшін жаңа талдау моделімен автоматты түрде салыстырады. Жобалау келесі кезеңдерді қамтиды: жергілікті (ұсақ ұяшықты) аналитикалық модель құру, жүктемелер мен шекаралық шарттарды қолдану, содан кейін элементтер мен материалдар қасиеттерінің жаңа моделін тағайындау. Алдыңғы талдаудың шекаралық шарттарын анықтау үшін пайдаланылатын нәтиже файлын көрсете отырып, тапсырманы баптап содан соң жіберуге болады. Жоғары сапалы пластикті қалыптау жұмыстары беттің барлық ауданы бойынша қолданылатын қысымның арнайы жүктемесін талап етеді. Бұл еркін көлемдегі айнымалы қысымның элементі. Adams көмегімен соңғы элементтерді қолдану арқылы бөлшектердің параметрлері үшін энергияны есептеуге болады.

Модельдің әр элементі бір және тек бір аймақтың бөлігі болып табылатын элементтерді нақтылауға арналған. Бір бөлшектің шекарасында орналасқан тораптар шекарадағы барлық тораптарда қайталанады. Осылайша, элементтердің жалпы саны тораптардың жалпы санының көптігіне қарамастан тізбекті іске қоса алады. Құрылғылардағы әрбір есептеулер жеке процестер арқылы орындалады. Талдаудың әртүрлі кезеңдерінде процестер өзара деректермен алмасуы тиіс. Бұл процесс байланыс протоколымен өңделеді. Әрбір кластер торабы көп процессорлық машина болуы мүмкін. MSC бағдарламалары матрицалық шешімдерді параллель орындай отырып қалған талдауларды тізбекті түрде орындай алады. Бұл программа ортақ жады бар машиналармен қатар кластерлердіде қолданатын шешімдерді пайдаланады. Байланыс үшін түрлі блоктық бағдарламалар қолданылады [3-4].



3 сурет - Серпімді компоненттерінің икемділігін ескере отырып, ұшақ қанаты механизациясының жұмысын Adams бағдарламасында модельдеу



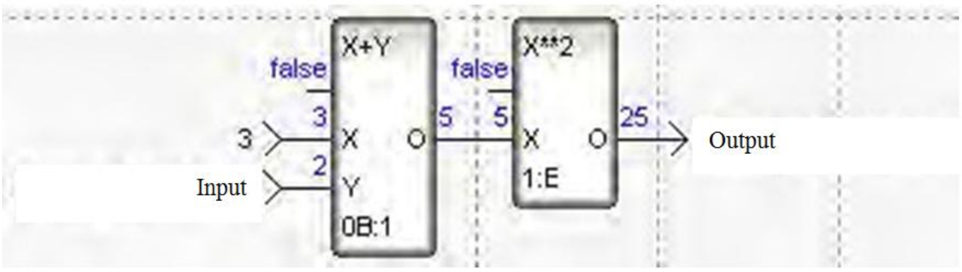
4 сурет - SimDesigner бағдарламасында жүктемелер арқылы ұшақтарды жобалау

Төртінші суретте модельдеудің детализациясы SimDesigner бағдарламасында жасалған. SimDesigner бағдарламасы MSC Nastran, Marc, Adams сияқты интеграцияланған қуатты бағдарламалық өнімдердің мүмкіндіктерін пайдаланады. Жылу жүктемелерін қолдана отырып, жобаны бағалау, 4 конструкцияның деформациялық сынақтарын бақылау әдістерінің бірі болып табылады. Бұл бағдарламалар есептерді жоғары дәлдікпен шешуге және жоғары жылдамдықпен модельдеуге мүмкіндік береді.

Үдерісті есептеу және визуализациялау үшін трассалау режимінде әзірленген жабдықтар мен бағдарламалар мүмкіндіктері.

Отандық өнеркәсіп үшін интеграцияланған бағдарламалық платформа қажет. Интеграцияланған бағдарламалық жасақтамасының мысалы ретінде Adastra Ltd компаниясы әзірлеген, аспаптарды бақылау режимі, технологиялық процестерді басқару және технологияны басқару құрылғыларын жобалау мүмкіндіктері бар Trace Mode бағдарламасын қарастыруға болады. Қазіргі уақытта бағдарламаның Trace mode 6 нұсқасы өнеркәсіптің түрлі салаларында кеңінен қолданылады және кешенді дамуы үстінде. Осылайша, кәсіпорынның өндірістік процестерінің кез-келген бөлігін автоматтандыру үшін Trace mode 6 бағдарламасын пайдалануға болады. Барлық деңгейдегі әрбір жоба бірыңғай аспаптық жүйеде және бір жоба шеңберінде құрылады. Автоматтандырылған басқару жүйесін жобалау технологиясы деректер базасын, plc басқаруды, OPC серверін, оператордың жұмыс орнын, жабдықтарды, қызметкерді, ақпарат өндірісін қамтиды. Бақылау режимі құрылғыны жобалау кезінде бес бағдарламалау тілін пайдалана алады. Trace mode бағдарламасының барлық функциялары автоматты жобалауға негізделген. Trace mode 6 интеграцияланған бағдарламалық қамтамасыз ету операциялық ресурстарының сыйымдылығына және өлшеу жүйесін бірнеше деңгейде автоматтандыру жобаларына мнемограммаларды, FBD блоктарды, құрылымдалған мәтіндерді, диаграммаларды пайдаланады.

Аспаптық блоктың дизайнын қарастырайық. Өлшенетін мәндер кіріс және шығыс аргументтері арқылы орнатылады. Әрбір сигналға тип, бит және т. б. мәндер беріледі, осылайша негізгі метрологиялық параметрлер тағайындалады. Бесінші суретте математикалық функциялар FBD-блоктарының математикалық бағдарламалау тілі арқылы сигнал алуы көрсетілген.



5 сурет - FBD диаграммалары арқылы математикалық жобалау принципі

Деректер сигналы математикалық модельдер түрінде өңделеді және FBD блоктары ретінде беріледі. Trace mode интеграцияланған бағдарламалық режимі базалық және арнайы машина жасау салалық білім беруде жүргізілетін практикалық және зертханалық жұмыстар үшін қолжетімді [5]. Бағдарламаның экономикалық модулі экономикалық есептеулер мен болжамдарды ескере отырып, жобаны құру үшін қолайлы. Жобаларды құру кезінде ресурстар мен жабдықтардың ағымдағы сипаттамалары, жөндеу, тоқтап қалу және материалдық ресурстарға қатысты бөліктерден тұратын Trace Mode бағдарламасының режимдерін пайдалануға болады [6,7]. Trace Mode бағдарламасын мобильді құрылғылар арқылы басқаруға болады. Trace Mode жобалары негізінде практикалық дәрістерді инженерлік мамандықтарда оқитын білім алушылардың түрлі пәндеріне енгізуге болады. Жобалау барысында бес заманауи бағдарламалық стандарттар пайдаланады: SFC (Sequential Function Chart), LD (Ladder Diagram), fbd (Function Block Diagram), st (Structured Text) және IL (Instruction List), бұл стандарттар кәсіби бағдарламашылар болып табылмайтын инженерлерге жұмыс жобаларын терезелер режимі арқылы жасауға мүмкіндік береді.

"Навигатор", модулі арқылы білім алушыларға ыңғайлы жоба түрін таңдауға болады. Басқару құрылғыларын құру барысында келесі процедуралар қолданылады: оператор немесе білім алушы ресурстар / детекторлар тобын құрады, содан кейін сигнал генераторын таңдайды: синусоидальды, кездейсоқ және т.б., трендті жүктеу және деректерді өңдеу Trace mode интеграцияланған бағдарламасы негізінде құрылғыны құру процесінің келесі кезеңдері болып табылады.

Қорытынды

Әртүрлі деңгейлі стандарттарды жақындастыру бағдарламалық құралдарды неғұрлым тиімді пайдалануға және күрделі өлшеу аспаптарын жобалау кезінде қателер мен дәлсіздіктер санын азайтуға мүмкіндік тудырады. Отандық және шетелдік стандарттарда ұсынылған әртүрлі компьютерлік бағдарламаларды біріктіре отырып, жобалаудың тұжырымдамалық саласын анықтаудың толық және дәйекті түрлері арқылы виртуалды кеңістікте басқару элементтерімен кері байланыс функциясын пайдалана отырып, толық өлшеу жүйесін құра аламыз. Білім алушыларды оқыту үшін осындай технологияларды енгізу компьютерлік ғылымдарды және қашықтықтан басқаруды үйретіп қана қоймай, интернетті және қашықтықтан басқаруды пайдалана отырып жүргізілген зерттеуге арналған шығындарды азайтады.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Morokina, G., Umbetov, U., and Mailybayev, Y. Automation design systems for mechanical engineering and device node design // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Vol1515.
2. Khasenova, G.,Khasanov, E. Overview of online learning // Industrial transport of Kazakhstan. – 2019. – №1(62).- P. 179-184.
3. Morokina, G., Sergeev, M., and Porozov, I. Creation of measuring system on the basis of integrated program Trace Mode6 environment at reading of remote lectures for students of a speciality 200101.65 // Innovative technologies in formation. – 2010. – P. 131-138.
4. Morokina, G. Teaching integrated programmer Trace mode in customs manufacturing // New technologies and forms of education. – 2010. – P. 39-40.
5. Khasenova, G.,Khasanov, E. Development of the full-time network education platform // Herald of the Kazakh - British technical university. – 2019. – Vol 16, Issue 3.- P. 20-25.
6. Morokina, G., Umbetov, U., and Mailybayev, Y. Computer-Aided Design Systems of Decentralization on Basis of Trace Mode in Industry // International Russian Automation Conference (RusAutoCon), 1994, Sochi, Russia
7. Morokina, G., Katsan, I., and Umbetov, U. Control systems on the base of TM6 in industry // Proceedings of the 31st International Business Information Management Association Conference, IBIMA: Innovation Management and Education Excellence through Vision, 2018, Milan, Italy

REFERENCES

1. Morokina, G., Umbetov, U., and Mailybayev, Y. Automation design systems for mechanical engineering and device node design // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Vol1515.
2. Khasenova, G.,Khasanov, E. Overview of online learning // Industrial transport of Kazakhstan. – 2019. – №1(62).- P. 179-184.
3. Morokina, G., Sergeev, M., and Porozov, I. Creation of measuring system on the basis of integrated program Trace Mode6 environment at reading of remote lectures for students of a speciality 200101.65 // Innovative technologies in formation. – 2010. – P. 131-138.
4. Morokina, G. Teaching integrated programmer Trace mode in customs manufacturing // New technologies and forms of education. – 2010. – P. 39-40.
5. Khasenova, G.,Khasanov, E. Development of the full-time network education platform // Herald of the Kazakh - British technical university. – 2019. – Vol 16, Issue 3.- P. 20-25.

6. Morokina, G., Umbetov, U., and Mailybayev, Y. Computer-Aided Design Systems of Decentralization on Basis of Trace Mode in Industry // International Russian Automation Conference (RusAutoCon), 1994, Sochi, Russia
7. Morokina, G., Katsan, I., and Umbetov, U. Control systems on the base of TM6 in industry // Proceedings of the 31st International Business Information Management Association Conference, IBIMA: Innovation Management and Education Excellence through Vision, 2018, Milan, Italy

Хасенова Г.И.[1], Майлыбаев Е.К.[2], Умбетов У.У.[3], Исайкин Д.В.[4]

Системы автоматизации проектирования узлов устройств в машиностроительном производстве

Аннотация. Эта статья посвящена анализу структуры устройств с помощью программ для производства транспортных средств. Для повышения качества необходимо оптимизировать основные параметры продукта. Использование полезной и недорогой программной платформы является важным и современным трендом. При проектировании устройства интегрированные программы позволяют создавать новые модули. Проведен обзор программ для анализа основных элементов отдельных частей конструкции устройства современных систем управления. В этой статье продемонстрирована идея реализации проектирования с помощью программы Trace Mode. В продукте Trace Mode показано, что существуют модули для проектирования и исследования новых качественных элементов.

Ключевые слова: проектирование, моделирование, программное обеспечение, анализ.

G.I. Khasenova, Y.M. Mailybayev, U.U. Umbetov, D.V. Isaikin

Automation design systems for mechanical engineering and device node Design

Summary. This paper is concerned with the analysis of the construction of devices with software programs for the engineering production. It is necessary to optimize the basic parameters of production for quality improvement. The important and modern trend is the development of a program platform for useful and inexpensive software. The integrating program allows us to create new modules of software for design devices. We present an overview of the programs for analyzing the main elements of the individual parts of construction devices for the modern control systems. It was shown that the idea of construction connected possible with integrated software system Trace mode. This product has a module for design and investigation of apparatuses with new quality of elements. Concepts relating to design issues are interpreted by different approaches in international standards.

Key words: design, modeling, software, analysis.

Авторлар жайлы ақпарат:

Хасенова Гульбану Ибрагимовна, Халықаралық ақпараттық технологиялар университетінің ассоциотивті профессоры, т.ғ.к.

Майлыбаев Ерсайын Құрманбайұлы, Қазақ қатынас жолдары университетінің PhD докторанты

Үмбетов Өмірбек Үмбетович, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің оқу-әдістемелік жұмысы жөніндегі вице-президенті, т.ғ.д, профессор

Исайкин Дмитрий Викторович, Қазақ қатынас жолдары университетінің PhD докторанты

About authors:

Gulbany I. Khasenova, cand. of tech. sci, associate professor, International Information Technology University.

Yersaiyn K. Mailybayev, PhD student, Kazakh University Ways of Communications.

Omirbek U. Umbetov, doct. of tech. sci., professor, Vice-Rector for Academic Affairs, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University.

Dmitri V. Isaikin, PhD student, Kazakh University Ways of Communications.

ЦИФРОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ЭКОНОМИКЕ И МЕНЕДЖМЕНТЕ

УДК 336.7.1, 004.9.

Kobadilov B.N.*, Omarov G.B.

University of International Business, Almaty, Kazakhstan

ADOPTION OF FINANCIAL TECHNOLOGIES INNOVATION BY KAZAKHSTAN'S FINANCIAL TECHNOLOGIES MARKET

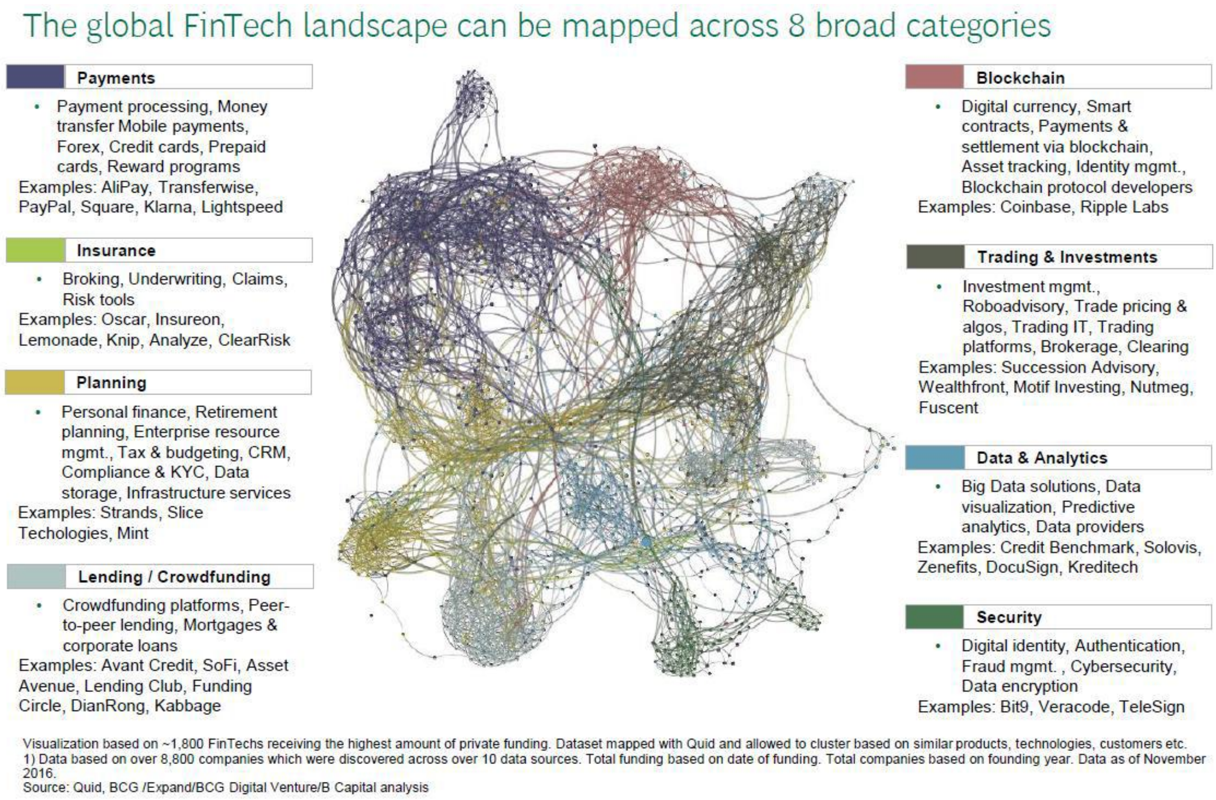
Abstract. *The banking sector in Kazakhstan is a system forming industry in the financial market of the country.* ***The relevance of*** *this work is due to the thesis that fintech is today the cornerstone in enhancing the competitiveness of Kazakhstan's financial market, which is essentially important billion for the banking industry in Kazakhstan. Today, banks are obliged to adopt fintech to stay competitive.* ***The purpose of the study is to*** *provide scientific novelty by analyzing the development of the financial technology industry and the level of application by banks in Kazakhstan of innovation in financial technology to increase the competitiveness of banking products. The main* ***object of research*** *is second-tier banks, but secondary research objects fintech ecosystem of Kazakhstan, which are defined by the fintech research methodology as companies serving commercial banks, the regulator, financial market participants that offer common fintech product, organizations that represent the state's interests in the development of fintech industry and their like-minded people. The article starts with definition of fintech and fintech products. Then it continues with a review of the financial market and Kazakhstan's fintech market. The paper gradually justifies the low fintech adoption index assigned by well-known business analysts like Deloitte.*

Key words: *fintech market, financial market, Kazakhstan, financial inclusion, bank products, innovation.*

Introduction

Fintech, according to well-known dictionary of the world, Merriam Webster, is defined as "the products and services that employ newly developed digital and online technologies in the banking and financial services industries". In other words, the concept of fintech goes beyond the borders of the banking industry and according to this definition, it also includes companies that are not registered as organizations that are named as "banks". If a programmer who registers a company that can offer a financial service or product to public, it can be assessed as fintech industry player. On the other hand, this definition comes against to those parties that claim that fintech is an industry of only where disrupters act and includes traditional banks into the concept of fintech [1].

The fintech sphere in terms of technologies used, can be divided into 8 big segments: payments, insurance, planning, lending and crowdfunding, blockchain, trading and investments, data analysis and analytics and security. According to fintech researcher Al Ajlouni they can be classified like it is illustrated in the next visualization of fintech funding by the amount attracted by them. Each segment consists of various technologies that are offered by companies or support the industry as a whole technology that function as a source of innovation [2].



Picture 1 – visualization of world fintech market development and technology segmentation. (Al Ajlouni 2019)

Kazakhstan's financial market

Kazakhstan's macroeconomic indicators for 2018 are a real GDP of $171 billion and a GDP per capita of $9237 with a population of 18.7 million. The inflation rate is 4%. Domestic debt is around 28 percent. Foreign Exchange and gold reserves are at the level of 30.747 million. GDP growth remained at around 5 percent in the period between 2015 and 2019 [3].

According to reports of financial consultants, the volume of the **Financial market** of Kazakhstan is relatively small from the point of view of potential investors. A big portion of this belongs to banks. Assets of banks equals 40 percent of Real GDP and earns 21 percent return on equity each year. The reasons for this size of the market has resulted from historical and political changes that Kazakhstan experienced in last 30 years and the waives of economic changes in the formation of today's financial market. Small number and the large poor segment of the population along with destructive and constructive effects from economic planners can be the reason for such a weak market [4]. However, according to the report of the World Bank 59 percent of adults own an account in financial institutions and 92 percent of companies and SME's have an account in registered financial institutions. Consequently, if the market merely belongs to **commercial banks** then it is clear that financial inclusion besides banks is at weak point. Moreover, most of the branches of commercial banks are found in the two biggest cities of the country Almaty and Nur-Sultan [5]. Other regions enjoy financial inclusion at relatively low level. This is justified by the low demand level of regions and results in low competition among banks in these regions compared to the two big cities of Kazakhstan. From all the population of Kazakhstan 77 percent use the Internet and 33 percent are active mobile Internet users and there are an average of 1.2 cards owned by each person.

However, compared to CIS countries Kazakhstan has relatively more banks and the leverage level of Kazakhstan is higher than other countries. The ratio of loans issued to GDP is high. In the mentioned indicators Kazakhstan's financial market is close to Russia, not by size and scale, but in terms of efficiency [4].

There are 3 types of **payment system** that exist in Kazakhstan-interbank clearing, interbank money transfers and the international payment systems, Visa and Master card, that perform 95% of all monetary transactions [6].

Kazakhstan's insurance market is less monopolized compared to other sectors, but the majority of insurance companies are owned by dominating commercial banks of Kazakhstan. Below, the rating of insurance companies is exposed.

In 2018, the **insurance industry** of Kazakhstan was comprised of 29 companies, 20 of which provide general insurance and 6 grant life insurance policies. All assets of these companies was equal to 1.88 percent of the country's GDP in 2018. Most of these assets belong to the same individuals that own assets in other industries as well. In terms of possession and market share the insurance market is monopolized [7].

Table 1 – Kazakhstan's insurance companies rating (Forbes Kazakhstan 2019)

	Rating of insurance companies of Kazakhstan	**Asset amount expressed in billion tenge**
1	AO «SK Evrasia»	251
2	AO «DO Narodnogo banka Kazakhstana «SK «Halyk»	115,3
3	AO «SK «Nomad inshurans»	23,9
4	AO «SK «Viktoria»	94,36
5	AO «SK «Komesk omir»	22
6	AO «Kaspi Strahovanie»	14,7
7	AO «SK «Kazakhmys»	40,5
8	AO «SK «ASKO»	3,79
9	AO «SK «Sentras inshurans»	16,8
10	AO «Neftenaya strahovaya kompania»	1,8
11	AO «Eksportnaya strahovaya kompania»	48,6
12	AO «CK «London Almaty»	5,58
13	AO «SK«Jýsan Garant»	
14	AO «KK ZIMS «Intertich»	6,09
15	AO «Zernovaya SK»	
16	AO «SK «Sinoasia B&R» (Sinoazia B and R)»	2,15
17	AO «SK «Freedom Finance Insurance»	2,3
18	AO «SK «Amanat»	
19	AO «SK «Transoil»	3,36

According to reports of the National Bank in 2019 there were 157 **Micro Credit Organizations** operating in Kazakhstan and their number is constantly growing year by year. MCO's total asset value in 2018 reached 286.55 billiion Tenge, which is 52 percent higher compared with the previous period. In the same period all MCO's made loans totalling 219.11 billion tenge [8].

Table 2 – Kazakhstan's MCO's rating (Musapirova 2019)

	MCO's listed by rating	**01.01.2019**	**change**
1	KMF	129,2	33,50%
2	Toyota financial services Kazakhstan	35,5	54,30%
3	BIK Finance	30	
4	Arnur Kredit	14,8	72,90%
5	YRYS	10,3	-3,10%
6	Online Kazfinans	5,8	820,50%
7	Asean credit fund	5,8	27,90%
8	Shinkhan finans	4,5	43%
9	RIC "Kyzylorda"	4,2	144,60%
10	ERG Microfinance	3,6	-22,20%

Online micro credit organizations started to operate actively in Kazakhstan from 2014 and experienced a devaluation period in 2015 for very start cycle of their life. From 2014 to 2018 OMCO's loaned 39.8 billion Tenge. According to industry reports this is 1 percent of commercial bank's and MCO's loan portfolio. In 2017, 944000 online loan contracts were issued by 250000 consumers, which makes an average of 3.8 contracts for each customer. Due to complaints of very high interest rates, in 2018 the National Bank prepared some limitations that would regulate the OMCO's [8].

After the unification process of pension fund companies in 2013 there is only one pension fund operating in Kazakhstan named "Unified accumulative pension fund" joint stock company (UAPF). The UAPF registered over 9 million pension accounts, from which 5.6 million are active, which accounts for 66 percent of the employed population. SAPF accrued $21 billion since its inception, which is 15 percent of GDP. Most of the resources of UAPF used to purchase government securities 44 percent and corporate bonds of Kazakhstani commercial banks 20 percent [8].

Table – 3 Financial inclusion in Kazakhstan (Kapparov 2018)

	2011	2014	2017
Debit card ownership (% age 15+)	31	32	40
Credit card ownership (% age 15+)	9	11	20
Credit card used in the past year (% age 15+)		5	17
Used a debit or credit card to make a purchase in the past year (% age 15+)		15	26
Borrowed any money in the past year (% age 15+)		45	45
Borrowed from a financial institution (% age 15+)	13	16	20
Outstanding housing loan (% age 15+)		15	21
Received domestic remittances in the past year (% age 15+)		12	18
Received domestic remittances through a financial institution (% age 15+)		2	8
Sent domestic remittances in the past year (% age 15+)		14	16
Sent domestic remittances through a financial institution (% age 15+)		5	9
Paid utility bills in the past year (% age 15+)		65	64
Paid utility bills using a financial institution account (% age 15+)		3	21
Received wages in the past year (% age 15+)		45	44
Received wages in cash only (% age 15+)		14	14
Deposit in the past year (% with a financial institution account, age 15+)		72	83
Made or received digital payments in the past year (% age 15+)		40	54
Made digital payments in the past year (% age 15+)		23	38
Received digital payments in the past year (% age 15+)		42	43

KASE, Kazakhstan's stock exchange was established in 1993 and is currently made up of 142 companies. KASE mainly performs transactions with foreign exchange rates and repurchase agreements (REPO). Market capitalization of KASE reached to $47 billion for equities and a long-term debt market of $24 billion.

Kazakhstan's financial market encountered huge cash outflows and comparatively tiny cash inflows during the formation of the current financial market.

30 percent of monetary relation in financial system occurs in the form of e-money and according to data from 2017 reached $1 billion [8].

Analysis of the development of the financial technology industry

The size of the fintech market of Kazakhstan is 17 billion Tenge. The expected market growth is 16 percent for 2019. In general, the market has remained active since 2013, so the market activity period is 5 years. 1675 specialists of various levels work in the Kazakhstan fintech market and, on average, each fintech company employed 42 fintech specialists of the region. On average, each fintech company serves 58,000 private sector customers and 370 legal entity clients. The coefficient of customer optimism in relation to the provided fintech services is 0.08, and the prospects of the company from the point of view of employees are 0.65. Also, optimism regarding the development and prospects of the fintech market is 0.55, but if we take the experience of working with fintech companies, the optimism of customers is above 0.7. The market potential is 0.4. The coefficient of uncertainty over the future for fintech companies is, according to fintech companies themselves, -0.3 [9].

Kazakhstan received 23.6 points in the world ranking for the development of the fintech market, tentatively with the USA, which is the leader, this rating is 446 points. The market is under development and there is still no company with a market capitalization of $ 1 billion. The largest market participant is Credit24. The index of sustainable development is 68.1. Popular and developing financial technologies and investment attraction sectors are online payments and online loans [10].

Kazakhstan's fintech market is at an early stage of market development. The government shows a desire to develop the market by attracting foreign investment and helps in every way to regulate the online loan market and venture financing. The government also founded the Astana International Financial Center, where there is a special zone with privileges for fintech startups.

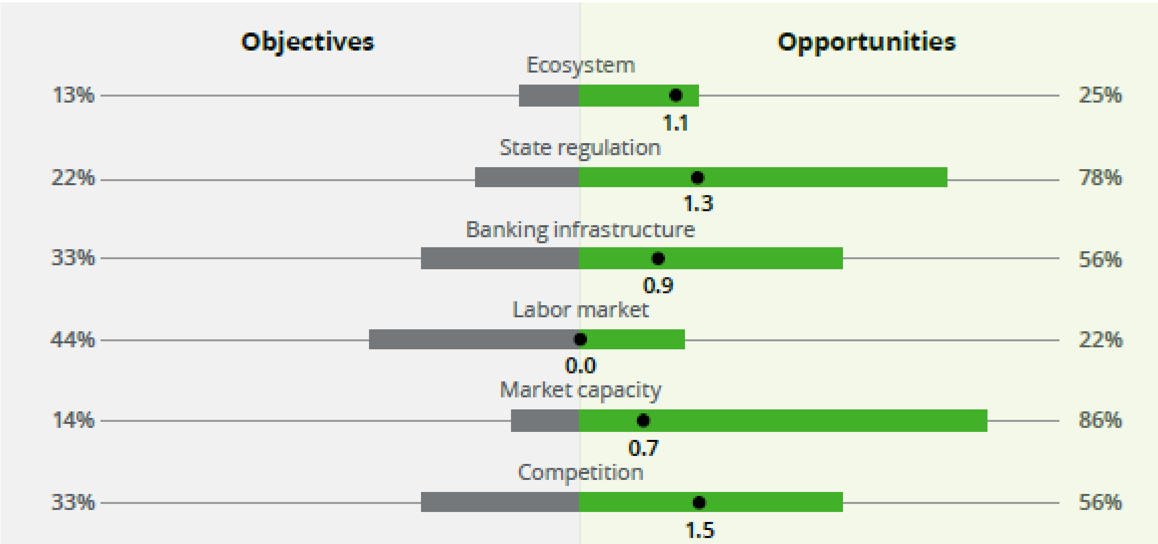


Figure 1-Fintech market affecting factors classified by positive (green) and negative (grey) impact (Deloitte CIS Research Center 2018)

According to experts working in the fintech industry, ecosystem and staffing are a weakness in the organization of the market. But in turn, market regulation, banking industry infrastructure, competition, along with market self-sufficiency, are positive factors that can contribute to market development [11].

The markets of Russia and Kazakhstan are very similar, since they have a common history and development paths. However, there are differences. Unlike Russia, the economy of Kazakhstan is not subject to sanctions, although it is closely related to the Russian economy since Russia is the main trading partner of Kazakhstan. As a result, in both countries a similar economic structure is dominated by large state-owned companies. Tenge, the Kazakh currency, is very volatile, as it is tied to the Russian ruble. Companies that will develop in Kazakhstan will have to launch their products at the international level, which is quite possible, given the openness of the local market. However, the main financial institutions of Kazakhstan are not transparent, like their Russian counterparts, which creates barriers for new market participants. Startups do not have easy access to the experience gained by large players, which prevents them from achieving success in business [12]. The venture capital market is underdeveloped. These circumstances create risks that can slow down the development of fintech technologies. Another slowdown factor affecting fintech is the small number of graduates of higher technical educational institutions with sufficient knowledge in the field of exponential technologies and their application for commercial purposes. Market participants also complain that the regulator imposes stringent conditions on microfinance organizations in the form of established interest rates. Participants argue that there is no dialogue between market participants and the regulator. The intervention of the regulator is imperative and punitive [13].

The majority of fintech specialists are optimistic about the further development of the scenario in the market and the majority of specialists working in the industry are satisfied with the position of their company and its perspective. Assessing the political and economic uncertainty affecting the adoption of strategic decisions in fintech companies, half of the respondents indicated that they are very uncertain, and this factor negatively affects decision-making, while only 10 percent indicated low uncertainty. It should be noted that government steps to regulate the market, the organization of special economic zones and the devaluation of the currency very sharply change the situation with uncertainty. In the Global Innovation Index for 2018 Kazakhstan takes 74th place which is a weak position. By the same rating agency Kazakhstan takes 64th position due to a comfortable and organized business environment, which is also bad news for the development of fintech in this country. World Talent Rank reports that Kazakhstan holds 40th position in availability of specialists that are capable to enhance the situation. Access to 3G and 4G internet bandwidth is good compared to CIS countries. Financial inclusion and online purchases are low compared to Russia and Belarus but comparatively better than other CIS countries [13].

Astana International Finance Centre reports that in terms of government regulation on financial technologies Kazakhstan has already adopted laws on remote identification, blockchain, artificial intelligence and cloud technologies, and did not regulate the internet of things. Regulation of Open API technology is in process [14].

Moreover, AIFC reports that there are more than 10 accelerators that address the problem of talent management in a given sphere operating in Kazakhstan and projects of law on accelerators regulatory sandbox, laws regulating regarding capital, government funds and tax privileges in the fintech sphere have already been discussed and adopted by the government. Besides, the government has discussed and adopted laws on government funds and venture capital [14].

Due to tax regulations in the country, Kazakhstan was compared to CIS and Caucasus countries, where Kazakhstan shows good results with the lowest VAT tax rates of 12 percent, while corporate income tax rate is at the same level as the other countries at 20 percent. In terms of the proportion of tax revenue to GDP, Kazakhstan is among countries with the lowest revenues from tax. However, the tax payment system experienced by taxpayers were at a satisfactory 56th place. The number of tax payment types are 7, which is good indicator compared to Kyrgyzstan which practices 51 types of tax that economic players should pay. Kazakhstan practices tax discounts on corporate income tax and value added tax. Besides, resident fintech companies of special technological zones such as AIFC enjoy differentiated tax rates [13].

Conclusion

Today, fintech is important more than ever because it includes everything we previously mentioned in this part and they refer that banks are obliged to grasp fintech in order to stay competitive. In the coming years, everything will be ready for expansion thanks to retail banking software, financial software and many other components. The advent of advanced technology, combined with the demand of customers for a safe and more convenient banking experience has led banks and financial services to the rapid implementation of financial technology. Only time will tell how fintech will develop further in the Kazakhstan's banking sector. In the paper, we needed to show the capability of Kazakhstan's financial market in the adoption of financial innovations, and fintech market development in Kazakhstan. Due to some restrictions, it was not possible to work out all the issues, but a critical proportion of the work was completed. Summing up financial technologies, the Kazakhstan banking sector takes into account and even implements technologies. But it is worth noting that it accepts innovation selectively. This can explain the development of technology like big data, scoring, credit technology and technology in the payment system. You can notice that Kazakh banks are showing greed in new investments and show caution by investing only in technologies that have been cash cows already and only improving these technologies further. The state promotes development by organizing various events and companies to accelerate development, but so far, the fintech industry remains underdeveloped in comparison with the world rating for the development of fintech markets. One important reason for the pessimistic conclusions is the lack of human capital. Responsible people for the development of this segment say that it is too early to assess the fintech market of Kazakhstan. Given the speed of fintech development in the world, there is a high probability of not keeping up with the participants of the fintech industry in other countries. This may lead to a losing position and reliance on outsourcing or blocking access to competitors from abroad.

REFERENCES

1. BBVA 2019 https://www.bbva.com/en/fintech-friday-look-it-dictionary/
2. Klostermann. J. Fintech and blockchain versus traditional banking // Fintech News. -2019 https://www.fintechnews.org/fintech-and-blockchain-vs-traditional-banking/
3. TE 2020 https://tradingeconomics.com/kazakhstan/gdp-per-capita
4. KPMG 2019 http://kcm-kazyna.kz/_media/KPMG-Private-Equity-Market-in-Kazakhstan-ENG-2019.pdf
5. Felsenthal, M. Financial Inclusion on the Rise, But Gaps Remain, Global Findex Database Shows // The world bank. -2018
6. National Bank of Kazakhstan 2019 https://nationalbank.kz/?docid=143&switch=english
7. National Bank of Kazakhstan 2019 Islamic banking growth prospects http://www. nationalbank.kz/cont/publish653554_31340.pdf?switch=kazakh
8. National Bank of Kazakhstan 2018 https://nationalbank.kz/cont/2018-%D0%B0%D0%BD%D0%B3%D0%BB..pdf
9. AIFC Financial sector overview https://aifc.kz/uploads/fin_report.pdf
10. The Fintech100 – announcing the world’s leading fintech innovators for 2018 https://home.kpmg/kz/en/home/insights/2018/10/fintech100.html
11. Sedov. Fintech crossing the borders // Fintech futures.-2018 https://www.fintechfutures.com/2018/08/case-study-robocash-fintech-crossing-the-borders/
12. Djilkishinova, M. Kazakh-Russian economic cooperation is strong and developing, says Russian trade rep in Kazakhstan // Astana times.- 2018 https://astanatimes.com/2018/11/kazakh-russian-economic-cooperation-is-strong-and-developing-says-russian-trade-rep-in-kazakhstan/
13. Deloitte CIS research center 2018 Private fintech as a tool for sustainable business development in Russia and Kazakhstan https://www2.deloitte.com/content/dam/Deloitte/ru/Documents/research-center/FinTech-Market-Trends%202018-en.pdf
14. AIFC 2020 The role of financial centers in driving economic growth https://fintech.aifc.kz/files/pages/2024/documents/2/the-role-of-financial-centers-in-driving-economic-growth-by-waifc.pdf
15. Forbes 2019 Rating of Kazakhstan’s insurance companies https://forbes.kz/ranking/strahovyie_kompanii_po_obschemu_strahovaniyu_-_2018
16. Al Ajlouni. Financial technologies in banking industry: challenges and opportunities. – 2019 https://www.researchgate.net/publication/331303690
17. Musapirova. Kazakhstancy vse chashe polzuyutsya uslugami mfo iz za legkoi dostupnosti zaimov // Kursiv. – 2019 https://kursiv.kz/news/tendencii-i-issledovaniya/2019-04/kazakhstancy-vse-chasche-polzuyutsya-uslugami-mfo-iz-za
18. Kapparov. Financial Inclusion and Financial Literacy in Kazakhstan // Tokyo: Asian Development Bank Institute // ADBI Working Paper. 2018 https://www.adb.org/publications/financial-inclusion-and-financial-literacy-kazakhstan
19. Deloitte CIS Research center 2018, Private fintech as a tool for sustainable business development in Russia and Kazakhstan-Fintech market trends https://www2.deloitte.com/content/dam/Deloitte/ru/Documents/research-center/FinTech-Market-Trends%202018-en.pdf

Кобадилов Б.Н.*, Омаров Г.Б.

Қазақстан Республикасының қаржы технологиясы нарығында қаржы технологияның инновацияларын қолдану

Аңдатпа: Қазақстандағы банк секторы – елдің қаржы нарығында жүйелік құрушы сала. Бұл жұмыстың өзектілігі бүгінгі таңда финтех Қазақстанның қаржы нарығының бәсекеге қабілеттілігін арттырудың негізі болып табылатын тезиске байланысты, яғни Қазақстандағы банк саласы үшін маңызы зор. Қазіргі уақытта банктер бәсекеге қабілетті болу үшін финтехті қолдануға міндетті. Зерттеудің мақсаты – қаржылық технологиялар индустриясының дамуын және қазақстандық банктердің банктік өнімдердің бәсекеге қабілеттілігін арттыру үшін қаржы технологиялары саласындағы инновацияларды қолдану деңгейін талдау арқылы ғылыми жаңалық қамтамасыз ету. Зерттеудің негізгі объектілері екінші деңгейлі банктер болып табылады, бірақ екінші деңгейдегі зерттеу объектілері – бұл ғылыми-зерттеу әдістемесімен коммерциялық банктерге қызмет көрсететін компаниялар, реттеуші органдар, жалпы финтех-өнім ұсынатын қаржы нарығының қатысушылары, финтехті дамытуда мемлекеттің мүдделерін білдіретін ұйымдар ретінде анықталатын зерттеу жүйесі, индустрия және олардың пікірлестері. Жұмыс финтех өнімдерін анықтаудан және финтех анықтамасынан басталады. Содан кейін қаржы нарығы мен Қазақстанның қаржылық технологиялар нарығына шолу жалғасуда. Бұл жұмыс Deloitte сияқты танымал бизнес-талдаушылар орнатқан «финтех технологиясын енгізу индексін» біртіндеп дәлелдейді.

Түйінді сөздер: финтех нарығы, қаржы нарығы, Қазақстан, қаржылық қолжетімділік, банк өнімдері, инновациялар

Кобадилов Б.Н.*, Омаров Г.Б.

Применение инноваций финансовых технологий на рынке финансовых технологий казахстана

Аннотация. Банковский сектор в Казахстане является системообразующей отраслью на финансовом рынке страны. Актуальность этой работы обусловлена тезисом о том, что финтех сегодня является краеугольным камнем в повышении конкурентоспособности финансового рынка Казахстана, что существенно важно для банковской отрасли в Казахстане. Банки в настоящее время обязаны применять финтех, чтобы оставаться конкурентоспособными. Целью исследования является предоставление научной новизны путем анализа развития индустрии финансовых технологий и уровня применения казахстанскими банками инноваций в области финансовых технологий для повышения конкурентоспособности банковских продуктов. Основным объектом исследования являются банки второго уровня, но вторичные объекты исследования экосистема финтех в Казахстане, которые определяются методологией исследования как компании, обслуживающие коммерческие банки, регулирующие органы, участники финансового рынка, которые предлагают общий финтех-продукт, организации, представляющие интересы государства в развитии финтех-индустрии и их единомышленников. Работа начинается с определения продуктов финтех и определения финтех. Затем продолжается обзор финансового рынка и рынка финансовых технологий Казахстана. Работа постепенно оправдывает низкий «индекс внедрения финтех-технологий», установленный такими известными бизнес-аналитиками, как Deloitte.

Ключевые слова: финтех-рынок, финансовый рынок, Казахстан, финансовая доступность, банковские продукты, инновации.

Сведения об авторах:

Кобадилов Бауыржан Нурбекович, MSc, докторант университета международного бизнеса.

Омаров Галым Буркитбаевич, к.т.н., ассоц. профессор кафедры экономика и бизнес международного университета информационных технологий.

About authors:

Kobadilov Bauyrzhan Nurbekovich, MSc, Doctorate student of University of international Business.

Omarov Galym Burkitbaevich, Ph.D., Associate Professor, Department of Economics and Business, International University of Information Technologies.

МИР ЯЗЫКА И ЦИФРОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАСС-МЕДИА

ӘОЖ 81:002

С.С. Татиева

Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті, Алматы, Қазақстан

АҚПАРАТТЫҚ ТЕХНОЛОГИЯЛАРҒА НЕГІЗДЕЛГЕН ҚҰРАЛДАРДЫ ҚАЗАҚ ТІЛІ ПӘНІНДЕ ҰТЫМДЫ ҚОЛДАНУ

«XXI ғасырда алдыңғы саптағы елдер қатарына өз жастарының интеллектуалды және рухани әлеуетін барынша дамыта алатын оқу орындарының ең тиімді жүйесін жасаған ел ғана көтеріле алады»

Н.Ә.Назарбаев

Аңдатпа: *Бұл мақалада білім беру процесінде ақпараттық технологиялардың рөлі қарастырылады. Сонымен қатар, қазақ тілі пәнінде ақпараттық және компьютерлік технологияларды қолданудың артықшылықтары туралы түсінік берілген.*

Түйінді сөздер*: ақпараттық технологиялар, техникалық құралдар, оқу үрдісі*

Кіріспе

Қазіргі жағдайда білім берудің ең өзекті міндеті студенттердің коммуникативтік мәдениетін қалыптастыру болып табылады. АКТ қазіргі университеттің білім кеңістігін кеңейтудің ең тиімді құралына айналуда.

Оқу үрдісінде ақпараттық технологияны қолдану студенттің оқу тиімділігін айтарлықтай арттырады. Бұл технологияларды қазақ тілін оқытуда қолдану арқылы үлкен нәтижелерге қол жеткізуге болады. ЖОО ақпараттық технологияларды қолдану студенттерге байыпты ғылыми-зерттеу жұмыстарын, мультимедиялық презентациялармен жобалау жұмыстарын және т.б. құру мүмкіндіктерін көрсетуге жол ашады.

Егер біз «Әдістемелік терминдер сөздігіне» (авторлар:Азимов Е.Г., Щукин А.Н.) жүгінсек, келесі анықтаманы табамыз: ақпараттық технологиялар дегеніміз – бұл «жинау, жинақтау, сақтау, іздеу, беру әдістерінің жүйесі». Компьютерлік байланыс желілерін қолдана отырып ақпаратты өңдеп беру [1].

Қазіргі уақытта сізге ақпарат алу, оны пайдалану, өзіңіз жасау мүмкіндігі қажет. АКТ-ны кеңінен қолдану оқытушыларға қазақ тілін оқытуда жаңа мүмкіндіктер ашады.

Ақпараттық технологиялар, әдетте, аудио, видео, компьютер, интернет сияқты техникалық құралдарды қолданатын технологиялар деп аталады.

Қазақ тілін оқытуда компьютерлік технологиялар кеңінен қолданылады. Компьютердің оқу құралы ретіндегі ерекшелігі оның күрделілігі, әмбебаптығы, интерактивтілігі сияқты сипаттамаларымен байланысты. Мультимедиялық бағдарламаларға негізделген интерактивті оқыту барлық әдістемелік, дидактикалық, педагогикалық және психологиялық принциптерді толығымен жүзеге асыруға мүмкіндік береді, оқу процесін қызықты етеді. Студенттердің тілдік дайындығының деңгейін ескеру қабілеті – индивидуация және оқуға сараланған тәсілдерді жүзеге асыру үшін негіз болып табылады.

Сонымен бірге қол жетімділік қағидасы сақталады және әр студенттің жеке қарқыны ескеріледі. Компьютердің көмегімен сабақта жеке, жұптық және топтық жұмыс түрлерін ұйымдастыруға болады. Алайда, компьютер сабақта оқытушының орнын баса алмайтынын есте ұстаған жөн. Компьютермен жұмыс уақытын мұқият жоспарлап, оны нақты қажет болған кезде пайдалану қажет.

Мультимедиялық оқу құралдарын қолдану – педагогикалық технологиялар дамуының табиғи кезеңі

Қазіргі уақытта мультимедиялық технологиялар кеңінен қолданылады. «Мультимедия» термині: көптеген орталарды білдіреді. Мұндай ақпарат құралдары: мәтін, дыбыс, бейне. Ақпараттың барлық осы түрлерін қолданатын бағдарламалық өнімдер мультимедия деп аталады.

Бүгінгі таңда университет білімін модернизациялау бағыттарының бірі – компьютерлік технологиялар мен мультимедияларды енгізу. Бұл студенттердің аналитикалық әрекеттерін жандандыруға, шығармашылық қабілеттерін ашуға, психикалық процестерін ынталандыруға мүмкіндік береді.

Оқытудың дәстүрлі әдістері мен заманауи ақпараттық технологиялардың, оның ішінде компьютердің үйлесімі оқытушыға осы қиын міндеттерді шешуге көмектеседі. Компьютерді пайдалану оқу процесін мобильді, сараланған, жеке етуге мүмкіндік тудырады.

Әдіскерлер АКТ құралдарының бірнеше классификациясын ажыратады. Бірінші классификацияға сәйкес білім беру жүйесінде қолданылатын барлық АКТ құралдарын екі түрге бөлуге болады: аппараттық (компьютер, принтер, сканер, камера, видеокамера, аудио және видео магнитофон және т.б.) және бағдарламалық қамтамасыздандыру (электрондық оқулықтар, тренажерлер, тест орталықтары, ақпараттық сайттар, интернеттегі іздеу жүйелері және т.б.) [2].

Қазіргі уақытта болып жатқан АКТ саласындағы серпіліс бізді танымдық қызметті ақпараттық қамтамасыз етуді ұйымдастыру мәселелерін қайта қарауға мәжбүр етеді. Осылайша, АКТ құралдарының екінші жіктемесі білім беру қызметінде ақпараттық технологияны қолдану мүмкіндігін қарастырады [3]:

- InternetExplorer, Mozilla Firefox т.с.с., түрлі іздеу жүйелерін (Yandex.ru, Rambler.ru, Mail.ru, Google.ru, Yahoo.com, т.с.с.) қолдана отырып, Интернетте әдебиет іздеуді және онымен жұмыс істеуді (дерексіз, ескерту, аңдатпа, дәйексөз және т.б.); негізгі Microsoft Office қосымшаларын пайдаланып мәтіндермен жұмыс істеу үшін: Microsoft Word сізге графикалық дизайнмен мәтіндер жасауға және өңдеуге мүмкіндік береді; Microsoft PowerPoint материалды көркемдеу үшін слайдтар жасауға мүмкіндік жасайды; Microsoft Excel есептеулерді орындауға, мәліметтерді талдауға және бейнелеуге және кестелер мен веб-беттердегі тізімдермен жұмыс істеуге; Microsoft Office Publisher бағдарламасы буклеттер, брошюралар және т.б. (PROMTXT) электрондық сөздіктерді (AbbyLingvo7.0) қолдана отырып, мәтіндерді автоматты түрде аудару үшін;
- ақпаратты сақтау үшін (CD-, DVD-дискілер, Flash-дискілер);
- байланыс үшін (Интернет, электрондық пошта, ICQ, Skype, MailAgent және т.б.);
- графика мен дыбысты өңдеуге және көбейтуге арналған (MicrosoftMediaPlayer, WinAmp, WinDVD, zplayer ойнатқыштары, ACDSee, PhotoShop, CorelDraw суреттерін көруге арналған бағдарламалар, Visio сызбалары мен сызбаларын құруға арналған бағдарламалар т. б.); жасап, өзгертуге мүмкіндік береді.

АКТ құралдары қазақ тілі сабақтарында қолдану

Аталған АКТ құралдары қазақ тілі сабақтарында студенттердің өзіндік жұмысын ұйымдастыруға қолайлы мүмкіндіктер туғызады. Олар компьютерлік технологияны жеке тақырыптарды оқып-үйрену үшін де, алған білімдерін өзін-өзі бақылау үшін де қолдана алады. Сонымен қатар, компьютер – кез келген тапсырманы қалағанынша қайталайтын, дұрыс жауапқа қол жеткізе алатын, дағдыларды автоматтандыратын ең шыдамды оқытушы.

Сабақты өткізудің дәстүрлі әдістерімен оқытушы студенттер үшін негізгі ақпарат жеткізушісі ретінде әрекет етеді, ол студенттің шоғырлануын, зейінін және есте сақтауын талап етеді. Бұл режимде әр студент жұмыс істей бермейді.

Мінездің психологиялық сипаттамалары, студенттердің қабылдау түрі сәтсіздікке себеп болады. Сонымен қатар, білім деңгейіне қойылатын қазіргі заманғы талаптар студенттің сабақтың тақырыбын игеруіне қажетті ақпарат көлемін азайтуға мүмкіндік бермейді.

Алайда, компьютерлік бағдарламаларды қолдана отырып, сабақты ұйымдастыру кезінде студенттерге мәтін, диаграмма, график, сызба түрінде анимациялық эффектілерді қолдана отырып, түрлі-түсті безендірілген ақпарат беріледі. Мұның бәрі, қазіргі дидактикаға сәйкес, сізге оқу материалын ауызша түсіндіруден гөрі анық және оңай алуға мүмкіндік береді. Мұндай сабақтарда студент өз бетінше жаңа материалды түсініп алға ұмтыла отырып, қажет болған жағдайда түсінбеген материалға оралып немесе алға қарай ұмтыла отырып, жеке режимде жұмыс істеуі өте маңызды.

Компьютер студенттердің әртүрлі жауаптарына адал: ол студенттердің мақтау сөздерімен немесе жала жабуымен жұмыс істемейді, бұл олардың дербестігін дамытады және сабақта жағымды әлеуметтік-психологиялық атмосфера жасайды, оларға өзіне сенімділік береді, осыған орай жеке басының дамуы үшін маңызды фактор болып табылады.

Сонымен, студенттердің компьютермен жұмыс істеуінің артықшылықтары мынада:

- студенттердің жалпы мәдени дамуы;
- компьютерлік дағдыларды жетілдіру;
- тіл деңгейін көтеру;
- қолайлы психологиялық климатты құру;
- студенттердің ынтасы мен пәнге деген қызығушылығын арттыру;
- студенттердің өзін-өзі бекітуі;
- оқытуды даралындыруды жүзеге асыру мүмкіндігі;
- кері байланыс қағидатын іске асыру;
- материалды көрнекі түрде көрсетудің үлкен мүмкіндіктері;
- тақтаға материал жазуға уақытты қоспағанда;
- оқытушының шығындарын үнемдеу;
- студенттердің жұмысын тексеру процесін жетілдіру;
- оқытушының беделін арттыру;
- бақылау мен өзін-өзі бақылаудың үйлесуі;
- студенттің іс-әрекетін объективті және уақтылы бағалау;
- өзіндік жұмыс дағдыларын жандандыру.

Заманауи педагогикалық технологияларды қолдану сізге өзгеруге мүмкіндік береді:

- оқудан есте сақтау функциясы ретінде, оқудан ақыл-ой даму процесі ретінде;
- статистикалық білім моделінен психикалық әрекеттердің динамикалық жүйесіне;
- орташа студенттің назарын сараланған және жеке оқу бағдарламаларына аударудан;
- сыртқы мотивациядан ішкі моральдық-еріктік реттеуге дейін.

Қазақ тілі сабағында ақпараттық-коммуникациялық технологияларды қолдану оқытудың тиімді құралы ретінде компьютердің орасан зор әлеуетін ашады. Компьютерлік оқыту бағдарламалары сөйлеу әрекетінің әртүрлі түрлерін жаттықтыруға және оларды әрқилы комбинацияларда біріктіруге, тіл құбылыстарын түсінуге, тілдік қабілеттердің қалыптасуына, коммуникативті жағдайларды жасауға, тіл мен сөйлеу әрекеттерін автоматтандыруға, сонымен қатар жеке тәсілдің жүзеге асырылуын және студенттердің өздік жұмыстарын күшейтуге мүмкіндік береді.

Қазақ тілі сабағында АКТ және интернет ресурстарын қолдану әдіснамалық, дидактикалық, педагогикалық және психологиялық қағидалардың толық спектрін жүзеге асырады.

Қазақ тілі сабақтарында компьютерлік білім беру бағдарламаларын қолдану коммуникативті мәселелерді шешудің тиімділігін арттырады, студенттердің сан түрлі сөйлеу әрекетінің түрлерін дамытады және сабақта студенттің қазақ тілдік белсенділігі үшін тұрақты мотивацияны қалыптастырады.

Жобалық әдіспен ақпараттық технологияның үйлесуі университет студенттеріне өздерінің білімдерін, дағдыларын іс жүзінде қолдануға мүмкіндік береді. Сондықтан бірлескен ұжымдық қызмет сәтті жүзеге асырылатын ғылыми-танымдық қызметті ұйымдастырудың бір түрі болып табылады. Бұл қазақ тілін үйренуге деген ынтаны арттыруға мүмкіндік береді.

Біздің ойымызша, қазақ тілі сабағында АКТ мен ғаламтор ресурстарын пайдалану бүгінгі күннің өзектілігі болып табылады. Оқытушы өз студенттеріне қызықты, заманға сай, өзінің педагогикалық шеберлігі мен зияткерлік деңгейін жетілдіруі керек.

Қоғамның қазіргі даму кезеңі ақпараттандыру үрдісімен сипатталады. Білім беруді ақпараттандыру процесінің негізгі бағыттарының бірі білім беру жүйесіне жаңа ақпараттық технологияларды енгізу болып табылады. Білім беруді ақпараттандыру процесінің дамуына байланысты оқу материалының көлемі мен мазмұны өзгеруде.

Қазіргі уақытта білім беру саласындағы маңызды өзгерістер ЖОО қазақ тілін оқытуға да әсер етті. Атап айтқанда, интернет-ресурстарды пайдалану, оқу процесінде компьютерлік бағдарламаларды оқыту сияқты жаңа ақпараттық технологиялар енгізіле бастады [4].

Біз 80-жылдардың ортасында басталған әлі де қарқынмен дамып келе жатқан ақпараттық, компьютерлік революция дәуірінде өмір сүріп жатырмыз. Компьютерлер біздің өмірімізге және қазақ тілін үйрену процесіне де кірді. Оқу үрдісіндегі компьютер – бұл студенттерді оқыту, олардың оқу іс-әрекетінің мүмкіндіктерін кеңейту құралы. Компьютерлер оқытушылардың оқытуды дараландыру қабілетін едәуір арттырады және қазақ тілін оқытуда студенттердің танымдық белсенділігін жүзеге асырады және оқу процесін студенттердің жеке ерекшеліктеріне бейімдеуге мүмкіндік береді.

Бүгінгі таңда компьютерлік технологияны және телекоммуникацияны бір пәндік салада пайдалану қабілеттілігін жалпы сауаттылықтың өлшемі ретінде қарастыру керек. Оны бүгінгі оқылым, жазылым және тыңдалым тәсілдерінің дәстүрлі түсіндірмесімен салыстыруға болады.

Ақпараттық және компьютерлік технологияларды қолдану бізге қазақ тілін оқытуда жаңа мүмкіндіктер ашады. АКТ-ны қолдана отырып, біз оқытудың жаңа формалары мен әдістеріне тап боламыз, сонымен қатар оқу процесіне жаңа тәсілдер мен стильдер іздейміз.

Сонымен, біз оқу үрдісінде АКТ элементтерін жиі атаймыз:

- компьютер мен мультимедиялық жоба, интерактивті тақтаны қолдану арқылы;
- көрсетілген электронды оқулықтар мен оқу құралдары;
- электрондық энциклопедиялар мен анықтамалықтар;
- интернеттің білім беру ресурстары;
- суреттер мен иллюстрациялары бар DVD және CD дискілері;
- бейне және аудио жабдықтар;
- интерактивті конференциялар мен конкурстар;
- қашықтықтан оқытуға арналған материалдар;
- ғылыми жобалар мен жобалар;
- қашықтан оқу [5].

Оларды студенттердің сөйлеу әрекетіне енгізу үшін лексикалық дағдыларды дамыту – сөздік қорды игерудегі басты міндет. Лексикалық дағдыларды қалыптастыруда компьютерлік технологияны қолдану процестің тиімділігін айтарлықтай арттырады [6].

Сөз мағынасын пысықтау үшін біз студенттерге, мысалы, сөздерді тақырыптық топтарға бөлуге арналған жаттығуды ұсынамыз (Мектеп: бор, парта, оқытушы. Отбасы: анасы, әпкесі, әкесі).

Компьютер арқылы сөздерді қолдануға үйрету үшін студенттерге мына сөздерден сөйлем құрауды ұсынамыз: бар, үлкен, сол жерде, менің, терезе, жатын бөлме, (Менің жатын бөлмемде үлкен терезе бар).

Оқыту кезеңінде және сөздік қорды өнімді іс-әрекетке пайдалану кезінде сөз тіркестерінің мазмұнына негізделген сөздерді біріктіру операциялары шешуші болады. Өнімді лексикалық дағдыларды қалыптастыру үшін біз компьютерді пайдаланып, студенттерді лексикалық бірліктерді біріктіруге байланысты іс-әрекеттерді үйретеміз. Мысалы, жаттығуға арналған тапсырма:

- айтыңызшы, тізімделген заттар не болуы мүмкін: үй, бөлме, үстел, кілем. Сын есімдер басқа бағанға орналастырылады: үлкен, ескі, ақ, әдемі. Студент осы сын есімдер мен зат есімдерден сөйлемдерді дұрыс құрастырып, оларды тиісті бағандардан төмендегі жолдарға жылжыту керек. Сонымен қатар толтырылған жолдардың саны студентке ол әлі құрастырмаған басқа да тіркестер бар екенін айтады. Сөз тіркестерін басқаларға қарағанда көбірек құраған студент көп ұпай жинайды.

Өнімді дағды қалыптастыру үшін мәлімдемедегі кемшіліктерді толтыру үшін жаттығу жасалады. Бұл жағдайда дұрыстығының көрсеткіші – алмастырылған лексикалық бірліктің семантикалық мағынасының біріккенге сәйкес келуі. Мысалы, біз студенттерге диалогтардағы кемшіліктерді тиісті лексикалық бірліктермен толтыруды ұсынамыз, немесе, біз сұраққа жауап беру үшін сөйлемді таңдау тапсырмасын береміз:

– Сіз шай ішесіз бе?

а) Қош келдіңіз

ә) Иә, өтінемін

б) Өзіңізге көмектесіңіз

Мұндай жаттығуларды жылдам орындау уақытты үнемдеуге байланысты зерттелген сөздік қорын арттыруға мүмкіндік береді. Компьютер сонымен қатар әртүрлі, бірақ күрделілігі бірдей тапсырмаларды орындайтын студенттерге негізделген сөздік қорын оқыту процесін жандандыруға септігін тигізеді. Сөйлеу әрекетінде лексикалық бірліктерді қолданудағы жаттығудың мысалын келтіреміз: студенттер тұтас диалог құруы керек.

- Иә Иә. Өтінемін, өтінемін.
- Сіз жеміс-жидек пен шұжықты қалайсыз ба?
- Өзіңізге көмектесіңіз.
- Иә, өтінемін. Маған бес алма бере аласыз ба?
- Рақмет сізге! Маған апельсин ұнайды. Мен апельсин алсам бола ма?

Бірдей диалог құрған студенттер жұптасады. Рөлдер бойынша диалогтарды оқиды және жаттайды. Осыдан кейін диалогтар бүкіл топтың алдында ойнатылады. Сонымен бірге диалогтарды тыңдайтын студенттер рецептивті лексикалық дағдыларды қалыптастырады.

Лексикалық дағдыларды қалыптастыру бойынша жасалған жұмыс диалогтік сөйлеудің сөйлеу дағдыларын қалыптастыруға көшуге мүмкіндік береді. Сабақтарда студенттердің дағдыларын қалыптастыруда компьютерлік бағдарламаларды пайдалану, компьютерлік оқыту технологиялары қазақ тілінің лексикасын оқыту кезінде қойылған мақсаттарға толық сәйкес келетіндігін көрсетті.

Компьютерлік технологияларды біз дәстүрлі оқу құралдарымен қатар қолданамыз. Дегенмен, компьютерлік бағдарламаларды қолдану тәжірибесі оқытудың дәстүрлі әдістеріне қарағанда компьютерлік технологияның көптеген артықшылықтары бар екенін көрсетеді. Олардың қатарында студенттердің дербестігін жекелендіру және интенсификациялау, танымдық белсенділік пен ынталандыруды арттыру, білім беруді интенсивтендіру және қолайлы оқу ортасын құру бар.

Грамматиканы оқыту барысында біз АКТ-мен жұмыс жасаудың әртүрлі әдістерін қолдануға тырысамыз.

Біз жаңа ережені түсіндіру немесе білімімді тексеру үшін Power Point бағдарламасындағы презентацияны қолданамыз. Түрлі-түсті презентация студенттерге теориялық материалды жақсы есте сақтауға көмектеседі.

Дайындық кезеңінде ғаламтор ақпарат жинау үшін қолданылады. Келесі кезең: Power Point бағдарламасында презентация жасау. Сөйлеу дағдысы: презентацияларды, компьютерлік оқулықтарды, кестелерді, диаграммаларды қолдана отырып жүзеге асырылады.

Презентация жасау барысында студенттердің дамуын байқау өте қызықты. Әр студент үшін бұл өздерін, қызығушылықтарын, алған дағдыларын көрсетуге мүмкіндік береді. Студенттер тақырыптар бойынша өздері туралы презентациялар жасайды, слайдтарда өздерінің фотосуреттерін, түйін сөздерін, сөз тіркестері арқылы хабарлама жасауға көмектеседі. Мұндай сөйлеу дағдылары тәжірибеде көптеген мәселелерге қызығушылық тудырады. Бұл тілде сөйлеуге жақсы ынталандыру болып табылады.

Келесі тақырыптар бойынша баяндамалар жасалды: «Менің отбасым», «Менің әуестігім», «Менің пәтерім», «Менің университетім», «Менің туған күнім», «Менің күн тәртібім». Студенттік презентациялар – олардың өмірі мен айналасындағы фактілер туралы әңгімелер ғана емес, сонымен қатар оларға түсініктеме беру, өз пікірлерін білдіру әрекеті.

АКТ сабақта тесттерді тиімді пайдалануға және сабақ уақытын үнемдеуге мүмкіндік береді. Студенттер тестілеуден кейін нәтижелерін бірден біле алады. АКТ қолдану бағалаудың субъективтілігін болдырмауға мүмкіндік береді.

Қорытынды

Қазір біз компьютерді пайдаланбай жұмысымызды елестете алмаймыз. Бұл тақырыптық жоспарлауды, сабаққа дайындалу кезінде, сабаққа үлестірмелі материалдарды (карточкалар, кестелер, диаграммалар, тесттер), сабаққа арналған көрнекі материалдарды, жобаларды жобалағанда және т.б қамтиды. Оқу процесін қадағалаймыз, студенттердің пән бойынша үлгерімін, нәтижелерін тіркейміз. Қазақ тілі сабақтарында АКТ қолдану материалды студенттерге көрнекі түрде жеткізуге, оқытушының жұмысын жеңілдетуге, білім алушылардың қызығушылығына байланысты оқу үлгерімін арттыруға, сонымен қатар материалды түсіндіруге бөлінетін уақытты қысқартып, топтастыруға көп көңіл бөлуге мүмкіндік береді. Аудиторияда компьютер мен ақпараттық технологияны пайдалану енді инновация емес, қажеттілік. Өйткені қоғам үлкен қарқынмен дамып келеді, ал студенттер мен оқытушылар заманға сай болуы керек, ал компьютерлік технологиялармен күнделікті қарым-қатынас ақпараттық кеңістікті оңай басқаруға мүмкіндік береді.

ӘДЕБИЕТТЕР

1. Азимов Э.Г., Щукин А.Н. Новый словарь методических терминов и понятий (теория и практика обучения языкам) М.: Икар, 2009. — 448 с. — ISBN 978-5-7974-0207-7.
2. Коптюг Н.М. Интернет-уроки как вспомогательный материал для учителя английского языка // Иностранные языки в школе. – 2000. - № 4. – С. 54-59.
3. Селевко Г.К. "Современные образовательные технологии" Москва "Научное образование" 1998.
4. Құдайбергенова К.С. Инновациялық тәжірибе орталығы- педагогикалық технология көзі. «Алматы», 2001.-75б.
5. Құдайбергенова К.С. Құзырлық табиғаты – тұлғаның өздік дамуында. – Алматы, -2006. -86 б.

REFERENCES

1. Azimov E.G., Schukin A.N. A new dictionary of methodological terms and concepts (theory and practice of teaching languages) M.: Ikar, 2009. - 448 p. - ISBN 978-5-7974-0207-7.
2. Koptyug N.M. Internet lessons as an auxiliary material for an English teacher // Foreign languages at school. - 2000. - No. 4. - S. 54-59.

3. Selevko G.K. "Modern educational technologies" Moscow "Scientific education" 1998.
4. Kudaibergenova KS The center of innovative practice is a source of pedagogical technology. «Almaty», 2001.-75p.
5. Kudaibergenevna KS The nature of competence is in the self-development of the individual. - Almaty, -2006.-86 p.
6. Ways to organize methodical work to improve the professional level of teachers // Scientific and practical collection. -Almaty, 2008.

С.С. Татиева

Рациональное использование информационных технологий на занятиях по казахскому языку

Аннотация. В данной статье рассмотрена роль информационных технологий в образовательном процессе. Выделены преимущества использования информационно-компьютерных технологий.

Ключевые слова: информационные технологии, учебный процесс, технические средства

S.S. Tatiyeva,

Rational use of tools based on information technology in Kazakh language lessons

Summary. The article describes threose of information technology in the educational process. The advantages of the use of information and computer technologies.

Key words: information technology, learning process, technical means.

Сведения об авторе:

Татиева Светлана Сериковна, магистр, сениор-лектор кафедры языков Международного университета информационных технологий.

About author:

Svetlana S. Tatiyeva, master, senior-lector at Language Department, International Information Technology University.

УДК 81-13

Шетиева А.Т.

Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан

ПРИМЕНЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ СМЫСЛОВОГО СОДЕРЖАНИЯ СПОРНОГО ТЕКСТА

Аннотация: *В настоящей статье на примере привлечения онлайн seo-анализа для выявления смыслового содержания текста демонстрируется возможное использование в лингвистическом исследовательском процессе в качестве дополнительных процедур информационных технологий. Материалом послужили спорные тексты, которые могут поступать на исследование специалисту-лингвисту в разном объеме и количестве.*

Ключевые слова*: анализ текста, смысловое содержание, seo-анализ текста, ключевые слова, семантическое ядро, спорный текст.*

Введение

В эпоху глобальной цифровизации информационные технологии активно внедряются во все сферы жизни и деятельности человека. Этот процесс захватывает и исследовательскую деятельность как самую передовую сферу. В лингвистике интеграция языка и технологий началась еще во второй половине 20-го века. Сейчас имеются не только отдельные программы, но и целые направления, созданные на стыке языка и информационных технологий – компьютерная лингвистика, корпусная лингвистика, машинный перевод, информационно-поисковые технологии. Однако данная статья посвящена применению одной частной методики в рамках исследовательского процесса в лингвистике.

Перед тем, как приступить непосредственно к изложению хода исследования считаем необходимым привести определение двух основных понятий. В качестве материала исследования был взят такой тип текстов, как *«спорные тексты»*. Данное название является условным и используется по отношению ко всем речевым произведениям, «представленным на судебную экспертизу или лингвистическое исследование» [1, с.62]. Акцент здесь делается на природу текста – это речевое произведение, т.е. текст, созданный человеком, результат речевой деятельности человека.

При исследовании спорных текстов первым и важным является вопрос определения его *смыслового содержания*. Фактически, без данного шага невозможно приступить к дальнейшему изучению того или иного аспекта, поскольку между определением содержания и последующими действиями есть связь, проявляющаяся через отношение «общее – частное». Между тем под *содержанием текста* понимается «1. внутренняя (понятийная, смысловая) сторона языковых единиц, по отношению к которой внешняя (звуковая, графическая и т.п.) их сторона приобретает свойства выражения; 2. внутренняя сторона построения высказывания, его смысловое наполнение; 3. описание какой-то ситуации» [2]. Первые два понимания связаны с лингвистическим контекстом и семантикой имеющихся в тексте языковых единиц. Третье понимание требует выхода за рамки лингвистического контекста и перехода к более сложному явлению – ситуации (или экстралингвистическому контексту), в которой был создан текст. Анализ речевой ситуации предполагает обращение к форме речевой ситуации, месту, времени, участникам коммуникации, их взаимоотношениям, продиктованным правилами и условиями, принятыми в обществе, намерениям и мотивам говорящего, интерпретации высказываний слушающим и пр. С алгоритмом такого анализа можно ознакомиться в источнике [3]. Настоящая же статья охватывает первые два понимания.

Методы исследования

Ход (алгоритм) исследования содержания текста

Содержание текста (то, о чем в нем говорится) представляется в виде наиболее частотных понятий, выраженных, как правило, словами, повторяющимися в тексте, поскольку «коммуниканты как бы «ходят кругами» вокруг определённых тем, неоднократно возвращаясь к ним в течение всего разговора» [4, с.26]. Такие слова составляют *семантическое ядро* текста. На первом этапе исследования выявляются наиболее частотные в плане употребления слова.

После чего производится определение внутритекстовых связей между выявленными словами. Через установление отношений между ключевыми понятиями, составляющими семантическое ядро текста, определяется объект разговора, поскольку «смыслы отображают не столько сами явления действительности, сколько связи и отношения между ними» [5]. Иначе говоря, смысл текста, структура смысла «определяются собственно семантическими единицами и отношениями между ними» [5].

Таким образом, на этапе определения основных смыслов, выраженных конкретными лексическими единицами, пока без учета прагмалингвистических характеристик спорного текста, происходит подсчет всех слов в тексте, устанавливаются наиболее часто встречающиеся слова, затем определяются лексико-грамматические связи между ними.

Как уже отмечалось выше, чтобы определить повторяющиеся слова в тексте, производится количественный подсчет слов, репрезентирующих то или иное понятие. Для этого в настоящей статье привлекается seo-анализ на онлайн-ресурсе https://advego.com [6].

Хотя seo-анализ имеет совершенно иные цели и связан с такими сферами, как маркетинг, продвижение продукта, в данном случае для лингвистического исследования важными являются следующие моменты:

1) в ходе seo-анализа ведется статистический подсчет, когда выявляются наиболее частотные слова, поскольку «семантический анализ призван показать соотношение общего количества слов в тексте и значимых слов, составляющих семантическое ядро» [7]; данный шаг оптимизирует работу исследователя, поскольку машина, как правило, быстро выводит результат, экономя время;

2) использование программы полностью исключает человеческий фактор, иначе говоря, содержание текста определяется объективно.

Результаты

В качестве примера в статье используется текст из материалов уголовного дела из архива «Экспертно-оценочного центра по г. Алматы», представленный специалисту-лингвисту в рамках лингвистического исследования. Данный текст был избран поскольку его объем (количество слов) позволяет рассмотреть текст в качестве примера в рамках статьи. В целях сохранения конфиденциальности имена собственные из данного текста полностью исключены.

Исследуемый текст:

«*Говорящий: Так, я, следователь* [называются фамилия, имя, отчество]. *Сегодня у нас 5-ое сентября 2016 года. Мною будет проведен допрос в качестве свидетеля .... . В настоящий момент у нас 10 часов 00 минут вечера, 5-ое сентября шестнадцатого года. Так,* [называются фамилия, имя, отчество], *да? Я Вам разъясняю, что в настоящий момент Вы будете допрошены в качестве свидетеля. В связи с чем я Вам разъясняю Ваши права согласно статье 78-ой, я Вам разъясняю, что в качестве свидетеля для дачи показаний может быть вызвано и допрошено любое лицо, которому могут быть известны какие-либо обстоятельства, имеющие значение для дела. Также я Вам разъясняю в порядке статьи, в соответствии со статьей 110, 214, я Вам также разъясняю, что Вы имеете право отказаться от дачи показаний. Которые могут повлечь для Вас самой или Ваших близких родственников, сейчас. Фонограмма окончена…*»

Текст вводится в соответствующее окно (рис.1).

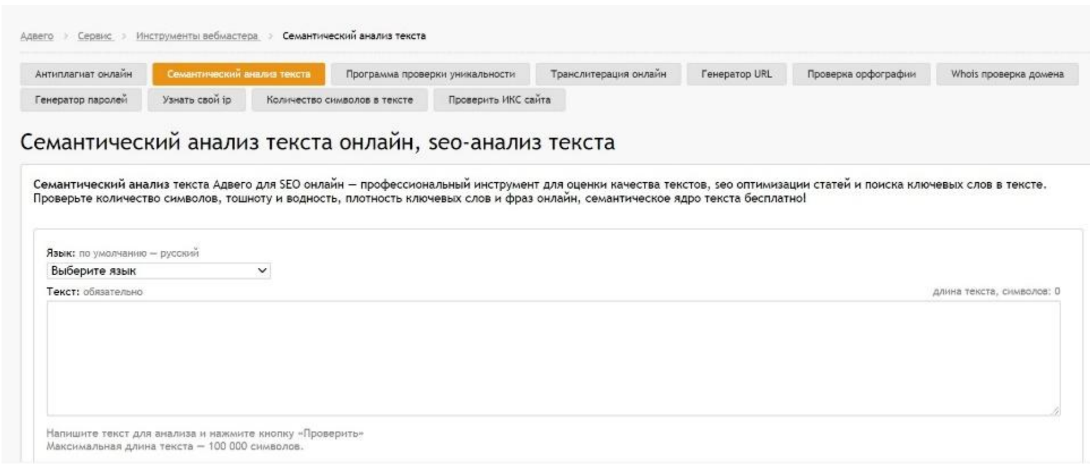


Рисунок 1 – Интерфейс онлайн-ресурса advego.com

Далее программа производит подсчет и выводит статистические данные (рис. 2).

Статистика текста

Наименование показателя	Значение
Количество символов	871
Количество символов без пробелов	737
Количество слов	127
Количество уникальных слов	68
Количество значимых слов	25
Количество стоп-слов	58
Вода	80.3 %
Количество грамматических ошибок	0
Классическая тошнота документа	2.24
Академическая тошнота документа	15.1 %

Рисунок 2 – Результаты статистического анализа текста

Как видно из Рисунка 2, статистические данные охватывают следующие параметры: количество символов, количество символов без пробелов, количество слов, количество уникальных слов, количество значимых слов, количество стоп-слов.

Остановимся лишь на представляющих интерес с лингвистической позиции составляющих. Итак, интересующим нас первым параметром является количество слов. Анализируемый текст состоит из 127 слов.

Следующий параметр – «стоп-слова». Здесь указывается «количество в тексте слов, не несущих смысловой нагрузки (предлоги, союзы, местоимения и др.)» [7]. Во время поиска по определенному запросу такие слова не учитываются поисковыми системами, что связано с их грамматическими и лексическими особенностями: предлоги, союзы и местоимения служат дополнением знаменательных частей речи, не обозначают как такового основного лексического значения. В анализе текста в силу лексических и грамматических особенностей данные слова также не учитываются, так как семантическое ядро могут составлять слова знаменательных частей речи.

Третий параметр, представляющий интерес для лингвистического исследования – «уникальные слова». Это – имена собственные, представляющие имена и фамилии людей, названия мест, организаций, улиц, городов и пр.

При подсчете наиболее частотных слов статистические программы показывают, сколько раз употреблялось одно слово в конкретной форме (см. рис. 3).

Семантическое ядро

Фраза/слово	Количество	Частота, %
разъяснять	5	3.94
качестве свидетеля	3	2.36 / 4.72
качество	3	2.36
свидетель	3	2.36
статья	3	2.36
5-ое	2	1.57
5-ое сентября	2	1.57 / 3.15
ваш	2	1.57
дача	2	1.57
дачи показаний	2	1.57 / 3.15
допросить	2	1.57

Рисунок 3 – Семантическое ядро текста

Именно на данном этапе и только по отношению к русскому языку возникают затруднения. Если английский язык уже полностью подчинен искусственному интеллекту, с русским языком, относящимся к флективным языкам, дело обстоит иначе. Поэтому программа одно и то же слово либо словосочетание, но в разных грамматических формах, т.е. с разными окончаниями, считывает, как разные слова, и выдает каждый результат отдельно. Поэтому далее после статистического подсчета исследователю необходимо проанализировать результаты, объединить одни и те же словоформы и определить семантическую связь ключевых слов между собой, исходя из их языковых характеристик, а также контекста, в котором они были употреблены.

После обработки статистических данных были выявлены ключевые слова, составляющие семантическое ядро текста: *в качестве свидетеля, разъяснять права, в соответствии со статьей, 5-ое сентября, дача показаний.* Распределение ключевых слов в соответствии с их лексическим и контекстуальным значениями позволило определить смысловое содержание текста: *допрос 5-го сентября в качестве свидетеля человека для дачи показаний. Следователь, которому принадлежат все высказывания в тексте, перед началом допроса разъясняет права*.

Заключение

Таким образом, при предоставлении на лингвистическое исследование больших по объему и количеству текстов применение информационных технологий оптимизирует исследовательский процесс, что проявляется в экономии времени и усилий лингвиста, исследующего материал. Однако с учетом указанных в статье сложностей, вызванных структурными особенностями русского языка, остается надежда, что в дальнейшем данные задачи решатся.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нелюбин Л.Л. Толковый переводоведческий словарь, 3-е издание, переработанное. – М., Флинта: Наука, 2003, https://perevodovedcheskiy. academic.ru/1608/смысловое_содержание.
2. Создание эффективного медиатекста. Теория прагматики, http://pragmatica.ucoz.ru/publ/teorija_pragmatiki_sredstv_massovoj_kommunikacii/osnovnye_kategorii_pragmatiki_tekstov_smk/pragmaticheskoe_soderzhanie_teksta/3-1-0-5
3. Shetiyeva, A.T. Algorithm for pragmalinguistic analysis of speech // ART-SANAT, Специальный выпуск: SI. – Стамбул: Istanbul Univ, Research Inst Turkology, Dept Art History, Istanbul Univ, Research Inst Turkology, Dept Art History, 2016. – С.286-292
4. Власова Л.А., Попова И.В. Выявление смыслового содержания корпуса текстов СМС в судебной лингвистической экспертизе // Современная теоретическая лингвистика и проблемы судебной экспертизы: сборник научных работ по итогам Международной научной конференции «Современная теоретическая лингвистика и проблемы судебной экспертизы». – М., Государственный институт русского языка им. А.С. Пушкина, 2019. – С.24-34.
5. Бондарко А.В. Лингвистика текста в системе функциональной грамматики // Текст. Структура и семантика. – Т.1. М., 2001. – С.4-13.
6. https://advego.com/text/seo/
7. https://promopult.ru/library/Семантический_анализ
8. Энж Э., Спенсер С., Фишкин Р., Стрикчиола Д. SEO – искусство раскрутки сайтов, Пер. с англ., 2-е изд, перераб. и доп., СПб.: БХВ-Петербург, 2014. – 688 с.

REFERENCES

1. Neljubin L.L.. Tolkovyj perevodovedcheskij slovar', 3-e izdanie, pererabotannoe, M., Flinta: Nauka, 2003, https://perevodovedcheskiy. academic.ru/1608/smyslovoe_soderzhanie.
2. Sozdanie jeffektivnogo mediateksta. Teorija pragmatiki, http://pragmatica.ucoz.ru/publ/teorija_pragmatiki_sredstv_massovoj_kommunikacii/osnovnye_kategorii_pragmatiki_tekstov_smk/pragmaticheskoe_soderzhanie_teksta/3-1-0-5
3. Shetiyeva, A.T. Algorithm for pragmalinguistic analysis of speech // ART-SANAT, Special'nyj vypusk: SI. – Stambul: Istanbul Univ, Research Inst Turkology, Dept Art History, Istanbul Univ, Research Inst Turkology, Dept Art History, 2016. – S.286-292

4. Vlasova, L.A., Popova, I.V. Vyjavlenie smyslovogo soderzhanija korpusa tekstov SMS v sudebnoj lingvisticheskoj jekspertize // Sovremennaja teoreticheskaja lingvistika i problemy sudebnoj jekspertizy: sbornik nauchnyh rabot po itogam Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii «Sovremennaja teoreticheskaja lingvistika i problemy sudebnoj jekspertizy», M., Gosudarstvennyj institut russkogo jazyka im. A. S. Pushkina, 2019. – S.24-34.
5. Bondarko A.V. Lingvistika teksta v sisteme funkcional'noj grammatiki // Tekst. Struktura i semantika. T.1., M., 2001. – S.4-13.
6. https://advego.com/text/seo/
7. https://promopult.ru/library/Semanticheskij_analiz
8. Jenzh, Je., Spenser, S., Fishkin, R., Strikchiola, D. SEO – iskusstvo raskrutki sajtov, Per. s angl., 2-e izd, pererab. i dop., SPb.: BHV-Peterburg, 2014. – 688 s.

Шетиева А.Т.

Ақпараттық технологияларды даулы мәтіннің мағыналық мазмұнын анықтауда қолдану

Аңдатпа: Берілген мақалада мәтіннің мағыналық мазмұнын анықтау үшін онлайн seo-анализді пайдалану мысалында, лингвистикалық зерттеуде қосымша ақпараттық технологияларды қолдану мүмкіндігі көрсетілген. Зерттеу материалы маман-лингвистке әртүрлі көлемде келетін даулы мәтіндер болып табылады.

Түйінді сөздер: мәтін талдауы, мағыналық мазмұн, мәтіннің seo-талдауы, түйін сөздер, семантикалық ядро, даулы мәтін

Assel T. Shetiyeva

Application of information technologies in determining the sense content of controversial text

Summary. This article illustrates the possible use of information technologies as an additional procedure in the linguistic research process using an example of attracting online seo-analysis to identify the semantic content of the text. The material of the scientific research was controversial texts that can be provided to a linguist in different volumes and quantities.

Key words: text analysis, semantic content, text seo-analysis, keywords, semantic core, controversial text.

Сведения об авторе:

Шетиева Асель Тлевлеевна, PhD, ассистент-профессор кафедры языков Международного университета информационных технологий.

About author:

Assel T. Shetiyeva, PhD, assistant-professor, Languages Department, International Information Technology University.

УДК 373.1.02:372.8

Тогжанова Л.К.

Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НЕКОТОРЫХ МЕТОДИЧЕСКИХ ПРИЕМОВ В ЦЕЛЯХ ФОРМИРОВАНИЯ КОММУНИКАТИВНОЙ КОМПЕТЕНЦИИ В КОНТЕКСТЕ ПРЕПОДАВАНИЯ РУССКОГО ЯЗЫКА В ВУЗЕ

Аннотация: *Статья посвящена особенностям формирования коммуникативной компетенции у студентов при обучении русскому языку в неязыковом вузе.*

В ней рассматриваются понятие «коммуникативная компетенция» и комплекс методов, способствующих ее формированию. Предлагается интегрированный подход, представляющий собой методическую комбинацию различных продуктивных и активных методов обучения.

Ключевые слова: *коммуникативная компетенция, обучение русскому языку, методические приемы, познавательный интерес, творческий метод, активный метод, мотивация.*

Введение. В языковом обучении ключевой является коммуникативная компетенция студента. Она, как известно, выражается во владении всеми видами речевой деятельности, умении воспринимать и воспроизводить чужую речь и создавать собственные устные и письменные высказывания. Коммуникативная компетенция есть готовность адекватно ситуации использовать соответствующие речевые умения.

Формирование коммуникативной компетенции является одной из актуальных лингвометодических проблем. В последние годы данную проблему в рамках коммуникативной методики преподавания русского языка рассматривали И.Н. Борисова, Д.Н. Изаренков, Е.И. Пассов, В.Л. Скалкин, Н.Д. Гальскова, А.К. Михальская, С.Г. Тер-Минасова, Н.И. Формановская и др.

Данное методическое понятие актуализировалось в связи с внедрением в систему образования функциональной модели компетентностного подхода и полиязычного обучения. В методике преподавания русского языка, в том числе как неродного (второго) и иностранного были обозначены новые образовательные цели, связанные с приоритетностью развития функционально-ориентированных речевых умений и навыков.

Обозначение соответствующих образовательных целей, как известно, способствовало обновлению содержания учебных программ по русскому языку, в которых прослеживается интеграция учебных дисциплин и направленность на обучение всем видам речевой деятельности, то есть формирование коммуникативной компетенции ставится во главу угла.

1. Методика

1.1 Понятие «коммуникативная компетенция» в методической литературе

Понятие “коммуникативная компетенция” определяется учеными по-разному. Так, оно широко употребляется в методике в качестве показателя уровня владения языком (Л.Ф. Низаева, 2016) [1].

По мнению известного методиста М.Р. Львова, коммуникативная компетенция – “термин, обозначающий знание языка (родного и неродного), его фонетики, лексики, грамматики, стилистики, культуры речи, владение этими средствами языка и механизмами речи - говорения, аудирования, чтения, письма - в пределах социальных, профессиональных, культурных потребностей человека. Коммуникативная компетенция - одна из важнейших характеристик языковой личности, она “приобретается в результате естественной речевой деятельности и в результате специального обучения” (М.Р.Львов, 1999) [2].

Н.Н. Пыжова рассматривает ее как “совокупность коммуникативных способностей, знаний и умений, адекватных для решения коммуникативных задач” (Н.П. Пыжова, 2005). [3].

В методике преподавания родного языка коммуникативная компетенция - это способность и реальная готовность к общению адекватно целям, сферам и ситуациям общения, готовность к речевому взаимодействию и взаимопониманию (Е.А. Быстрова и др., 2004) [4].

По мнению Е.И. Литневской, это овладение всеми видами речевой деятельности и основами культуры устной и письменной речи, базовыми умениями и навыками использования языка в жизненно важных для данного возраста сферах и ситуациях общения (Е.И. Литневская и др., 2006) [5].

Следовательно, в большинстве работ под коммуникативной компетенцией подразумевается речевое поведение, адекватное реальной жизненной ситуации.

По мнению Л. Бахмана, о сформированности коммуникативной компетенции свидетельствуют следующие умения и навыки:

- адекватно воспринимать устную речь и быть способным передавать содержание прослушанного текста в сжатом или развёрнутом виде в соответствии с ситуацией общения;
- выбирать и использовать средства языка в соответствии с коммуникативной задачей и ситуацией общения;
- владеть монологической и диалогической речью, соблюдая этические нормы общения;
- владеть навыками осознанного, беглого чтения текстов различных стилей и жанров, проводить их информационно-смысловой анализ;
- создавать письменные высказывания, адекватно передавая содержание прослушанного или прочитанного текста с заданной степенью конкретизации;
- составлять план, тезисы, конспект;
- владеть иностранным языком на уровне функциональной грамотности (L.Bachman, 1996) [6].

1.2 Формирование коммуникативной компетенции посредством активной учебной деятельности

Преподавание русского языка в современном неязыковом вузе имеет свои особенности, свои специфические проблемы и вопросы. Русский язык для студентов указанной категории вузов - средство получения научной информации, фактор активного включения в сферу науки, производства и общественной жизни. Ключевая роль в этом направлении – освоении особенностей научного стиля русского языка отводится изучению русской терминологической лексики, имеющей важное профессионально-коммуникативное значение в деятельности будущего специалиста.

Однако прежде чем представить апробированные нами активные методы и приемы усвоения терминологических единиц на основе чтения специализированных текстов, а также в процессе профессионально ориентированной коммуникации определимся с содержанием используемого в рамках данной работы научно-понятийного аппарата, включая и сами понятия *термин / терминология*.

Детально определяет термин О.Д. Митрофанова, отмечающая, что термин – это «слово, устойчивое терминологическое сочетание (или сокращение), которое выражает и в известной степени квалифицирует в данной системе терминологии определенное научное понятие, отражая в своем буквальном значении характеристические признаки терминируемого класса предметов и взаимосвязи этого класса с другими с достаточной для взаимного общения точностью» [7].

В понимании термина мы солидаризируемся с точкой зрения авторов учебника по современному русскому языку: термин – это слово или словосочетание, являющееся наименованием научного или технического понятия и определяющее его [8].

А совокупность терминов различных областей науки и техники, функционирующих в сфере профессионального общения, принято называть терминологией, которая составляет основную, наиболее значимую и информативную часть лексической системы языка науки.

В работе с терминами определяющую роль, безусловно, играют критерии отбора терминов. Наше внимание привлек список таких критериев, выделенных В.В. Дубичинским: «Это – нормативность, строгая синхронность лексики, ориентация на индивидуальный {словарный} запас, на определенный круг тем, целенаправленность обучения» [9]. Однако более исчерпывающе выглядит перечень критериев отбора терминов, представленный С.В. Гринев-Гриневичем: тематическая принадлежность (исключение терминов смежных областей), ориентация на словарный запас обучаемых (предполагается, что у студентов и специалистов уже есть запас общелитературных и общенаучных слов и последние в словарь не включаются), системность (для исключения пропуска важных понятий), полнота охвата терминолексики, синхронность (временной фактор), употребительность (частотность), семантическая ценность термина, терминообразовательная способность, нормативность и сочетаемость [10]. Данный список мы бы все-таки дополнили критерием *целенаправленности обучения* из перечня В.В. Дубичинского, в этом случае, на наш взгляд, первый приобретает самодостаточные характеристики.

Наконец, средоточием рассматриваемых на учебных занятиях терминов, как правило, является учебный текст, и нам важно определиться с его трактовкой. Здесь мы придерживаемся определения Е.П. Александрова, отмечающего, что учебный текст – это текст, с которым осуществляются учебные действия; это текст, с помощью которого передается учебная информация, стимулируется личностный рост обучающихся, формируется социокультурный опыт, мотивируется образовательная деятельность, происходит становление, развитие и упражнение познавательных и творческих способностей, умений и навыков обучающихся, контролируются результаты учебно-воспитательной работы [11].

Следует отметить, что при формировании коммуникативной компетенции обучающихся принципиально изменяется и роль преподавателя. Его главной задачей становится мотивировать студентов на проявление инициативы и самостоятельности, что в свою очередь обусловливает необходимость использования методов, стимулирующих интерес к предмету, к числу которых, по нашему мнению, относятся познавательные игры, частично-поисковые, творческие методы, создающие ситуации занимательности и соревновательности.

Формирование коммуникативной компетенции студентов, по нашему мнению, будет результативным, если в процессе обучения русскому языку опираться на систему продуктивных методов и приемов, обеспечивающих активную творческую деятельность.

Обучение русскому языку в вузе непосредственно связано с профессиональной ориентированностью и научным стилем речи. В связи с чем на занятиях по дисциплине «Русский язык» на специальностях «Вычислительная техника и программирование», «Система информационной безопасности» применяется текстовый и лексический материал соответствующей научной сферы.

Для развития коммуникативной компетенции наиболее рациональным является интегрированный подход, реализуемый в комбинации проблемно-поисковых, игровых (активных) и творческих, продуктивных методов обучения.

Одним из активно применяемых автором приемов обучения, актуализирующих важные учебные понятия и способствующих проявлению познавательного интереса студентов, является прием сравнения. Проводится в соревновательной форме: студенты делятся на небольшие по составу группы и определяют и характеризуют термины в сфере информатики и лингвистики, опираясь на их межвидовые, межродовые, внутриродовые отношения, например:

- *редактирование, рецензирование;*
- *ячейка, база данных;*
- *оперативная память, внешняя память;*
- *подлежащее, сказуемое;*
- *запятая, точка с запятой.*

Следующий методический прием “Третий лишний” связан с нахождением лишнего понятия и обоснованием ответа:

- *буфер обмена, внешняя память, курсор;*
- *диаграмма, диапазон, жесткий магнитный диск;*
- *локальная сеть, одноранговая сеть, вычислительная система.*

Следующий прием “Продолжите описание” позволяет проверить уровень владения письменной русской речью. Студентам раздаются карточки с описанием какого-либо понятия, которое необходимо дополнить. К примеру, следующее:

“***Вычислительная система*** *– увязанная совокупность средств вычислительной техники, в которую входят не менее двух основных процессоров либо вычислительных машин и развитая система периферийных устройств. Вычислительные системы имеют…*”

Работу с конструированием текста можно предварить применением приема “Ассоциативный куст”, который позволяет актуализировать уже имеющиеся знания, активизировать познавательную активность обучающихся и мотивировать их на дальнейшую работу с текстом.

Пример задания: Дано ключевое слово: система. Запишите вокруг него все возможные ассоциации (научные понятия), обозначая стрелочками смысловые связи между ними.

Далее составляется связный текст, представляющий собой научное повествование или описание.

Развитию устной коммуникативной компетенции достаточно эффективно способствуют ролевые игры, предполагающие роли Задающего вопросы и Отвечающего, например, интервью у известного специалиста в области информационных систем. Подобные интервью предполагают, в том числе вопросы, связанные с употреблением специальных понятий и объяснением их значений.

Большие возможности в развития коммуникативной компетенции заложены в методах активного обучения, а именно в учебной дискуссии. Данный метод наиболее приближен к естественным средствам активизации речевых и мыслительных процессов. Кроме того, он формирует навыки группового сотрудничества и взаимодействия.

Так, проводились дискуссии на темы: “Проблемы кибербезопасности”, “Информатизация общества и проблема духовной культуры”. Проведению дискуссии предшествовала подготовительная работа, заключавшаяся в разработке позиций, аргументации и формулировании вопросов оппонентам.

Еще один активный метод ролевая игра, ее конкретный вид - “В эфире - новости” - позволяет отработать произношение, развить речевые навыки и умение составлять научно-популярные и публицистические тексты.

1.3 Анализ и редактирование текста – способы совершенствования коммуникативной компетенции

Важное значение при формировании коммуникативной компетенции имеет работа с текстом, так как данное “... понятие, как феноменологическое явление обладает такими свойствами и характеристиками, которые позволяют определить его в качестве основы методики обучения языкам” [12].

Так, на занятиях применяется продуктивный метод, позволяющий закрепить и проверить полученные знания – аспектный анализ текста. Работа проводится в группах. Студентам предлагается проанализировать научный текст, охарактеризовав его языковые особенности.

Второй вариант этого метода ориентирован на “распределение” между группами признаков научного текста, например: 1 группа – стилевые черты; 2 группа – вид связи (параллельная, цепная); 3 группа – морфологические средства связи; 4 группа – синтаксические средства связи.

В формировании письменной коммуникативной компетенции помогает применение метода “Редактирование текста”. Так, для редактирования предлагаются тексты, требующие сжатия и стилистической правки, например:

Оперативная память – это одна из главных частей системы компьютера, от ее объема зависит эффективность работы всего оборудования. Это память быстрого доступа, которая запускается с помощью устройства запоминания. Скорость доступа определяется возможностями накопителя, и данные хранятся только до отключения компьютера. Поэтому все материалы, с которыми ведется работа, нужно сохранять. Многие задаются вопросом: какой объем оперативной памяти будет достаточным для работы? Это зависит от системы.

Речь идет не о версии ОС, а о разрядности. Узнать, какая система у вашего компьютера, можно, посмотрев его свойства. Она бывает двух видов:

- 32-разрядная система - не больше 3 Гб оперативной памяти;

- 64-разрядная система – до 9 Гб оперативки.

Быстроту действия компьютера определяет процессор, а оперативная память только выдает информацию по запросу. До тех пор, пока объем оперативки меньше установленной, система работает мощно. Если же оперативной памяти маловато, система будет задействовать жесткий диск, что скажется на скорости. За что отвечает оперативная память? За хранение временных сведений её еще называют ОЗУ – оперативное запоминающее устройство. У него имеется свой объем памяти, когда-то он исчислялся в мегайбайтах, в нынешней реальности – в гигабайтах.

Оперативная память компьютера задает темп всем системам, когда выполняются приложения. Чем лучше свойства и вместительность оперативки, тем стремительнее выполняются задачи, которые ставит пользователь. Оперативная память оказывает влияние:

- на быстроту действия компьютера;

- на единую эффективность системы;

- на умение системы включать множество ёмких ресурсных проектов одновременно.

Что происходит, если не хватает оперативной памяти? Объем оперативки – критичный коэффициент, в этом случае начинают долго загружаться страницы и открываться папки. Программы зависают, иногда после определения команды возникает пустая страница. Значительной чертой является частота записи, чем больше объем оперативки, тем скорее откроется нужная информация.

Задание: сократите текст, сохранив основную информацию. Проведите стилистическую правку текста.

Далее хотелось бы привести отдельные примеры послетекстовых заданий.

1. *Работа в парах*. Студентами выписываются термины, определяется смысловая связь между понятиями, группы слов соединяются прямыми линиями с ключевым понятием. В итоге получается структура, которая определяет информационное поле данной темы, графически отображает процесс размышления, связь между терминами.

2. *Составление кластера на основе справочного материала*. Составьте кластер, упорядочив представленную в справочных материалах информацию. (В справочных материалах хаотично даны компьютерные термины, представляющие две родо-видовые группы, связанные между собой. Задача: систематизировать их, точно обнаружив их родо-видовые связи).

3. *Терминологический диктант*. Преподаватель зачитывает дефиниции терминов, использованных в проанализированном учебном тексте, а студенты записывают сами эти термины.

4. *Групповая работа*. Каждый студент получает карточку с названием темы, объединяющей ряд терминов, рассмотренных в проанализированном учебном тексте. Ребята должны сформировать группы, самостоятельно определив, к какой из них они могут примкнуть. Заключительным этапом задания является работа по формулировке понятий. Каждая группа озвучивает сформулированные понятия, в то время как другие группы выступают в качестве проверяющих.

5. *Уровнево-дифференцированное задание* (для сильных студентов): студент получает индивидуальную карточку с заданием, на которой написано название одной из специальных тем, представленных в недавно рассмотренном учебном тексте: отвечающий должен сам вспомнить и написать значение терминов, относящихся к заданной теме.

6. *Работа с графиками, схемами, диаграммами и др., представленными в учебниках, учебных пособиях по специальности:* а) использовать подписи (соответствующие термины) для анализа содержания рисунков; б) сравнить объекты, изображаемые на рисунках; в) составить по иллюстрации рассказ с использованием актуализированных в рассматриваемом учебном тексте терминов.

7. *Использование мультимедийных средств.* При демонстрации учебного фильма (дополнение к учебному тексту) отключить звук и попросить студента прокомментировать процесс, остановить кадр и предложить продолжить описание дальнейшего протекания процесса, попросить объяснить процесс.

8. *Выступление студентов с мультимедийной презентацией*. Работа над ней и выступление с презентацией развивает речь, мышление, память, учит конкретизировать, выделять главное, устанавливать логические связи.

9. *Опрос по цепочке «Отгадай термин!».* Рассказ одного студента прерывается в любом месте и право ответа передается другому.

10. *Тренинги: а) «Четвертый лишний».* Необходимо убрать в ряду лишний термин, обосновать свой выбор; б) *«Определите по описанию».* Следует по описанию «отгадать» соответствующее понятие; в) *«Продолжите предложение»* и др.

11. *Составление рассказов по заданным словам (д\з). Для слабых студентов:* дать опорные термины в последовательности, соответствующей в рассмотренном учебном тексте; *для студентов среднего уровня*: термины дать без определенной последовательности; *для сильных студентов:* внести «лишние» слова, которые не использованы в тексте.

12. *«Писатель»*. Составить тексты в форме приключенческого рассказа или рассказа о путешествии с использованием изученных терминов.

13. *Создание синквейна. 1. Термин*. 2. Однозначный, стилистически нейтральный. 3. Называет, квалифицирует, систематизирует. 4. Словарный состав определенной научной сферы. 5. Сокровищница.

Результаты. Наш опыт работы по развитию и совершенствованию коммуникативной компетенции студентов на уроках русского языка в неязыковом вузе показывает, что следует опираться на систему продуктивных заданий с ориентацией на будущую профессию обучающихся.

Наиболее эффективной является комбинация активных и творческих методов. Использование разнообразных способов изучения учебного материала развивает познавательный интерес и повышает результативность обучения.

Продуцирование на занимательной и творческой основе устных и письменных связных высказываний разной жанрово-стилистической принадлежности способствует выработке у студентов способности решать коммуникативные задачи в режиме дефицита времени и в соответствии с коммуникативной целеустановкой.

Важную роль в формировании коммуникативной компетенции играет групповая работа, позволяющая студентам обучаться самостоятельно, в сотрудничестве друг с другом.

Апробированные автором на занятиях по дисциплине “Русский язык” в неязыковом вузе различные активные, проблемные, творческие методы обучения повышают у студентов уровень коммуникативной компетенции. Их комбинированное применение способствует:

- формированию устойчивых коммуникативных компетенций;
- активизации эмоциональной памяти, воображения;
- интенсификации процессов анализа и синтеза;
- личностному росту обучающихся;

- развитию учебной и познавательной мотивации;
- повышению качества знаний.

Обсуждение

Применение системы активных, проблемных, творческих методов на профессионально-ориентированном материале при обучении русскому языку в неязыковом вузе дает позитивный результат: повышается учебная мотивация и активность обучающихся, в процессе групповой работы студенты анализируют и классифицируют языковые и текстовые единицы, самостоятельно ищут творческие решения, выполняя различные коммуникативные задания.

Полагаем, что необходимо использовать методику комбинирования различных типов продуктивных заданий, так как это позволяет опираться на разные формы организации учебной деятельности и способствует эффективному развитию коммуникативной компетенции. В этом случае учитываются все аспекты формирования четырех видов речевой деятельности, развиваются такие умения и навыки, как:

- создавать тексты различных типов и жанров;
- аргументировать свои ответы и защищать собственные идеи;
- выявлять главное и существенное;
- использовать книжную и научную лексику в соответствии с целью и ситуацией общения;
- проводить лингвостилистический анализ текста;
- продуцировать собственный текст для достижения определенного коммуникативного намерения.

Студенты овладевают навыками работы в группе, приобретают способность к осуществлению учебного сотрудничества; наблюдается личностный рост и развитие интеллектуального потенциала обучающихся.

Заключение

Одной из насущных проблем методики преподавания русского языка является формирование коммуникативной компетенции. С целью ее решения лингвометодикой был предложен деятельностный подход, обеспечивающий самостоятельную творческую деятельность каждого обучающегося.

В формировании навыков и умений устной и письменной речи важную роль играют мотивация и эффективность организации образовательного процесса.

Опираясь на свой опыт преподавания русского языка в неязыковом вузе, мы полагаем, что изучение русского языка с применением продуктивных, творческих технологий на профессионально-ориентированном материале позволит развить познавательный интерес у студентов и активизировать их учебную деятельность.

Занимательный характер, элементы соревновательности и творчества создают оптимальные условия для продвижения каждого студента.

Применяемые нами методы имеют свою специфику и достоинства, но правильная их комбинация позволяет эффективно решать лингвометодические проблемы, в частности, формировать коммуникативные навыки.

На основе наблюдения и оценки проявления коммуникативной компетенции мы пришли к выводу, что использование комплекса активных, продуктивных методов вызывает повышение эффективности процесса обучения. Студенты с интересом работают, стремятся полно и глубоко раскрыть изучаемый вопрос, самостоятельно собирают необходимую информацию, создают и трансформируют тексты с соблюдением стилевых и жанровых особенностей, делают выводы и обобщение.

Таким образом, разработка методик, базирующихся на комбинации различных продуктивных, творческих и активных методов, имеет перспективы, так как позволит внести вклад в дальнейшее развитие вопроса о формировании коммуникативной компетенции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Низаева Л.Ф. Коммуникативная компетенция: сущность и компонентный состав // Молодой ученый. – 2016. – №28. – С. 933-935. – URL https://moluch.ru/archive/ 132/37125/ (дата обращения: 15.11.2019).
2. Львов М.Р. Словарь-справочник по методике преподавания русского языка: пособие для студ. пед. вузов и колледжей. – М.: Изд. центр «Академия»; Высш. шк., 1999. – 272 с. – С. 92 – 93.
3. Пыжова П.Н. Психологическая компетентность руководителя: учеб. метод, пособие / Н.П. Пыжова. – Минск: Академия упр. при Президенте РБ, 2005. – С. 4-5.
4. Обучение русскому языку в школе: учеб. пособие для студентов педагогических вузов / Е.А. Быстрова, С.И. Львова, В.И. Капинос и др.; под ред. Е.А. Быстровой. – М.: Дрофа, 2004. – 237 с.
5. Литневская Е.И., Багрянцева В.А. Методика преподавания русского языка в средней школе: Учеб. пособие для студентов высших учебных заведений/ Под ред. Е.И. Литневской. – М.: Академический проект, 2006. – 588 с.
6. Bachman L.F. Language testing in practice: Designing and developing useful language tests / L.F. Bachman, A.S. Palmer. – Oxford: Oxford University Press, 1996. – 384 p. – P.108.
7. Митрофанова О.Д. Научный стиль речи: проблемы обучения. – М.: Русский язык, 1985. – 230 с.
8. Новиков Л.А., Иванов В.В., Кедайтене Е.И., Тихонов Л.Н. Современный русский язык. Лексикология. – М.: Русский язык, 1987. – 160 с.
9. Дубичинский В.В. Лексикография русского языка. – М.: Наука: Флинта, 2008. – 432 с.
10. Гринев-Гриневич С.В. Введение в терминографию: как просто и легко составить словарь. – М.: ЛИБРОКОМ. – 2009. – 224 с.
11. Александров Е.П. Учебный текст: опыт дефиниции и типологического анализа // Режим доступа: http://portalus.ru
12. Кажигалиева Г.А. О текстоцентрическом подходе к преподаванию русского языка как неродного в педагогическом вузе // Вестник КазНПУ имени Абая. – Серия «Филологические науки». – №4 (46). – 2013. – С.109-113.

REFERENCES

1. Nizayeva L.F. Communicative competence: essence and component composition // Young scientist. - 2016. - No. 28. - P. 933-935. - URL https://moluch.ru/archive/132/37125/ (accessed: 11/15/2019).
2. Lvov M.R. Dictionary-guide on the methodology of teaching the Russian language: a manual for students. ped universities and colleges. - M.: Publishing. Center "Academy"; High School, 1999 .-- 272 p. - p. 92 - 93.
3. Pyzhova P.N. The psychological competence of the supervisor: textbook. method, allowance / N.P. Pyzhova. - Minsk: Academy of Management under the President of the Republic of Belarus, 2005. - P. 4 - 5.
4. Teaching Russian at school: textbook. manual for students of pedagogical universities / E.A. Bystrova, S.I. Lviv, V.I. Kapinos et al .; under the editorship of E.A. Fast. - M .: Bustard, 2004 .-- 237 p. -P. 27.
5. Litnevskaya E.I., Bagryantseva V.A. Methods of teaching Russian language in high school: Textbook. manual for students of higher educational institutions / Ed. E.I. Litnevskaya. - M.: Academic project, 2006. - 588 p. - P. 39.
6. Bachman L.F. Language testing in practice: Designing and developing useful language tests / L.F. Bachman, A.S. Palmer. – Oxford: Oxford University Press, 1996. – 384 p. – P.108. (правильный перевод)
7. Mitrofanova O.D. Nauchnyi stil rechi: problem obucheniya. – M.: Russkiy yazyk, 1985. – 230 s.

8. Novikov L.A., Ivanov V.V., Kedaitene E.I., Tikhonov L.N. Modern Russian language. Lexicology. - M.: Russian language, 1987. -160 p.
9. Dubichinskiy V.V. Lexsikografiya russkogo yazyka. – M.: Nauka: Flinta, 2008. – 432 s.
10. Grinev-Grinevih S.V. Vvedeniye v terminografiyu: kak prosto i lehko sostavit slovar. – M.: LIBRICOM. – 2009. – 224 s.
11. Alexandrov E.P. Uchebnyi text: opyt definitiyi i tipologicheskogo analiza // Rezhim dostupa: http://portalus.ru
12. Kazhigalieva G.A. On the text-centric approach to teaching Russian as a second language in a pedagogical university // Bulletin of KazNPU named after Abay. - Series "Philology". - No. 4 (46). - 2013. - P. 109-113.

Тоғжанова Л.К.

ЖОО–да орыс тілін оқытудағы коммуникативтік құзіреттілікті қалыптастырудың әдістемелік амалдары жайлы

Аңдатпа: Мақала бейтілдік ЖОО студенттеріне орыс тілін оқытудағы коммуникативтік құзіреттіліктің қалыптасу ерекшеліктеріне арналған.

Онда “коммуникативтік құзіреттілік” түсінігі және оның қалыптасуына ықпал ететін әдістер кешені қарастырылады. Әртүрлі өнімді және белсенді оқыту әдістерінің әдістемелік комбинациясы болып табылатын біріктірілген тәсілдеме ұсынылады. Мақала авторының пікірі бойынша, мұндай тәсілдеме оқытудың тиімділігі мен жоғары дәрежелі коммуникативтік құзіреттіліктің қалыптасуын қамтамасыз етеді. Ұсынылған оқыту әдістері оқу қызметін белсендіруге ықпал жасайды және студенттердің ауызекі және жазбаша тілдерін шығармашылық негізде дамытады.

Түйінді сөздер: коммуникативті құзіреттілік, орыс тілін оқыту, оқыту әдістері, танымдық қызығушылық, шығармашылық әдіс, белсенді әдіс, ынталандыру

Togzhanova L.K.

On the use of certain methodological techniques in purposes of forming communicative competence in the context of teaching Russian language at the university

Abstract. The article is devoted to the features of the formation of communicative competence among students in teaching Russian in a non-linguistic university. It examines the concept of “communicative competence” and a set of methods that contribute to its formation. An integrated approach is proposed, which is a methodological combination of various productive and active teaching methods.

Key words: communicative competence, teaching the Russian language, teaching methods, cognitive interest, creative method, active method, motivation.

Сведения об авторах:

Тогжанова Ляйла Кенжегалиевна, ассистент-профессор кафедры языков Международного университета информационных технологий.

About authors:

Togzhanova L., assistant-professor, Languages Department, International Information Technology University.